

**Antwoorden tentamen Kosmologie**  
Vincent Icke – vrijdag 15 november 2002

---

*Op uw tentamenformulieren heb ik slechts zeer spaarzaam opmerkingen gemaakt. Door vergelijking met onderstaande antwoorden kunt u zien waaraan ik de beoordeling heb opgehangen. In enkele gevallen zijn meer benaderingen mogelijk. Bij de beoordeling van varianten heb ik, evenals bij de 'hoofdvarianten' hier gegeven, gelet op de scherpte van de formulering en op volledigheid van het argument.*

---

**1a.** In het zeer vroege Heelal ( $10^{-10}$  sec) was er bijna exact evenveel materie als antimaterie. Door de symmetriebreking van de zwakke wisselwerking, gecombineerd met de uitdijning van het Heelal, was echter de materie-antimaterie annihilatie niet perfect (Sakharov-mechanisme). Omdat die symmetriebreking zo klein is, was echter de afwijking ook heel klein, zodat verreweg de meeste deeltjes een antideeltje vonden om mee te annihileren. De annihilatiefase produceerde dus zeer veel fotonen, vergeleken met de hoeveelheid overblijvende deeltjes (die wij later, uiteraard, 'materie' zijn gaan noemen). Het vroege Heelal was dus sterk gedomineerd door fotonen. Aldus werd de nucleosynthese onderdrukt, omdat bijna iedere associatieve reactie (die mogelijk zou moeten zijn bij een energie van een paar MeV, en die in een voorkeursrichting zou moeten verlopen wegens de uitdijning van het Heelal) werd tenietgedaan door fotodissociatie. Tegen de tijd dat het Heelal zover was uitgedijd dat die reacties wel op gang konden komen, was de energie zo laag dat fusie alleen nog via Gamow-tunneling kon plaatsvinden. De reactie wordt verder vertraagd doordat voor elke toename van het atoomnummer een neutron tot een proton moet vervallen; dit is een zwak proces met een karakteristieke tijd die lang is vergeleken met de expansietijd van het Heelal. Tenslotte stopte de keten bij koolstof, omdat in de C-kern een resonantie zit die alle processen vertraagt (resonantie is als een gebonden toestand, en impliceert een lange levenstijd, in elk geval lang vergeleken met de toen geldende uitdijningstijd).

**1b.** Juist doordat al deze reacties zo ver buiten evenwicht plaatsvonden, om de genoemde redenen, waren zij alle zeer gevoelig voor de plaatselijke omstandigheden: temperatuur, druk, dichtheid, en de uitdijningseigenschappen van het toenmalige Heelal (Hubble-getal en vertragsingsparameter). De relatieve abundanties van de lichte elementen zijn zodoende een goede graadmeter voor die kosmische parameters. In het bijzonder de abundantie van lithium is zeer belangrijk. Helaas is lithium een zeer reactieve kern, en wordt in alle hoofdreekssterren snel vernietigd. De meeste informatie komt dus uit de abundantie van deuterium, 3-helium en 4-helium, en in mindere mate uit lithium in sterren waarvan men aanneemt dat zij zeer oud zijn.

**2a.** In een 'stof' heelal wordt de interne druk  $P$  verwaarloosd (materie of straling geven geen bijdrage aan de interne energiedichtheid). Zodoende

$$\rho a^3 = \rho_0 a_0^3 \equiv \frac{3M}{4\pi}$$
$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{a} - kc^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2$$

(zie aantekeningen, b.v. (32.1-4)).

**2b.** Bij kleine  $a$  domineert de eerste term, bij grote  $a$  de derde, en er is dus een minimum. Om in het fasevlak een minimum te vinden, differentiëren we naar  $a$  (dus  $d/da$ , en *niet*  $d/dt$ ; dat is voor de dynamica!) Deze differentiatie laat zien dat het minimum ligt bij

$$\frac{d}{da} \left( \frac{2GM}{a} - kc^2 + \frac{\Lambda}{3}a^2 \right) = 0 \quad \rightarrow \quad a^3 = \frac{3GM}{\Lambda}$$

Vullen we dit in, dan blijkt dat  $da/dt = 0$  bij

$$k = \frac{1}{c^2} (9\Lambda G^2 M^2)^{1/3}$$

Dit is het statische heelalmodel waarvoor Einstein de constante  $\Lambda$  invoerde.

**2c.** Het stationaire punt in het fasevlak  $(da/dt, a)$  is een *zadelpunt*. Zelfs al zouden we een heelal starten met de berekende waarde van  $a$ , dan nog zou het door een infinitesimale fluctuatie altijd op een fasebaan terechtkomen die naar oneindig leidt. Dus is dit model – zoals De Sitter opmerkte – niet stabiel. Kijken we naar de waarden van de diverse termen in de vergelijking voor  $da/dt$ , dan zien we dat die in de buurt van het stationaire punt van vergelijkbare orde van grootte zijn.

**2d.** Als we in de buurt van een zadelpunt zitten, begint ons Heelal juist op dit moment aan een versnelde uitdijning. Ruim vóór dat punt is de  $\Lambda$ -term van geen belang, daarna ploft ons Heelal exponentieel uit elkaar en dat zouden we beslist merken! Dus juist op het moment dat wij aan het meten zijn, klapt het Heelal van gedaante om. Dat is wel erg toevallig. De ‘metingen’ van  $\Lambda$  berusten op de veronderstelling dat Type-Ia supernovae goede standaard-lichtbronnen zijn. Wat is waarschijnlijker: (1) dat ons Heelal gevuld is met een mysterieuze ‘donkere energie’, en dat wij dat juist toevallig nu kunnen opmerken, of (2) dat wij nog niet voldoende weten van het ontploffingsgedrag van supernovae?

**3.** Is vrijwel volledig behandeld in de aantekeningen, Sect.10 en Sect.11.