

## KİSİMİ TÜREVİLİ DENKLEMLER (ÖZET)

### Keyfi Fonksiyonların Yok edilmesi

$u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ ;  $x, y, z$  değişkenlerinin bağımsız fonksiyonları olsunlar.  $\Phi(u, v) = 0 \dots (*)$  denklemi ile tanımlanan tüm yüzeyler tarafından sağlanan en düşük mertebeden KTD'yı bulalım.  $z$ 'nin  $x, y$ 'lere bağılı olduğunu gözönünde tutarak (\*)'dan sırasıyla  $x$  ve  $y$ 'ye göre KT'ler alınırsa

$$\left. \begin{aligned} \Phi_u(u_x + u_z p) + \Phi_v(v_x + v_z p) &= 0 \\ \Phi_u(u_y + u_z q) + \Phi_v(v_y + v_z q) &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{vmatrix} u_x + u_z p & v_x + v_z p \\ u_y + u_z q & v_y + v_z q \end{vmatrix} = 0$$

### Birinci Basamaktan Lineer Denklemler

$A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = G(x, y)$  şeklinde genel formülü verilen KTD'lerde  $A \neq 0$  ve  $B \neq 0$  ise  $\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A}$ ,

$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \neq 0$  şeklinde tanımlanan bir karakteristik denklem elde edilir. Buradan

$z(x, y) = z(\xi, \eta)$ ;  $\xi = x, \eta = c$  ile dönüşüm uygulanırsa ve  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$  KT'leri bulunup

$z_x = z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x$  ve  $z_y = z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y$  formülünde yerine yazılırsa ve  $z_x, z_y$  değerleri de verilen denklemde yerine yazılırsa gerekli integraller alınarak  $(z, \xi, \eta)$ 'ya bağılı denklem elde edilir, buradan  $\xi, \eta$  değerleri yerine  $x, y$  cinsinden değerleri yazılarak çözüm elde edilir.

### Birinci Basamaktan Yarı Lineer Kısmi Türevli Denklemler

$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z)$  şeklindeki denklemlerin çözümlerinde Lagrange Metodu kullanılır.

Burada  $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$  Lagrange Sistemi ile  $\frac{dy}{dx} = \frac{Q}{P}$ ,  $\frac{dz}{dx} = \frac{R}{P}$  'den  $u(x, y, z) = c_1, v(x, y, z) = c_2$  'lerden herbiri

yardımcı sistemin bir ilk integralidir. Bulunan ifadelerin lineer bağımsız olması dolayısıyla Jaqobienlerin 0'dan farklı olması gerekir.

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, z)}, \frac{\partial(u, v)}{\partial(y, z)} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_x & u_z \\ v_x & v_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_y & u_z \\ v_y & v_z \end{vmatrix} \neq 0$$

Genel çözüm  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi sabitler olmak üzere  $y = y(x, c_1, c_2)$ ,  $z = z(x, c_1, c_2)$  şeklindedir. Bu denklemler  $c_1$  ve  $c_2$ 'ye göre çözümlerse Lagrange sisteminin çözümü  $u(x, y, z) = c_1$ ,  $v(x, y, z) = c_2$ . Buradan  $u$  ve  $v$  farkı lineer bağımsız olmalıdır.  $\Phi(u, v) = 0$  genel çözümdür.

### Birinci Basamaktan Lineer ve Yarı Lineer Kısmi Türevli Denklemler için Cauchy Problemi

Birinci Basamaktan Yarı Lineer KTD'nin genel çözümünün  $\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$  parametrik denklemleriyle önceden verilmiş bir  $\Gamma$  eğrisinden geçen integral yüzeyinin belirlenmesinde kullanılışı;

Lagrange sisteminden  $\Phi(u, v) = 0$  bulunduktan sonra  $\Gamma$ 'deki değerler  $u$  ve  $v$ 'de yerlerine konur,  $t$ 'ye bağılı  $c_1$  ve  $c_2$  eşitlikleri elde edilir.

### Lineer Olmayan Birinci Basamaktan Kısmi Türevli Denklemler

#### Bağdaşabilir Sistemler

Birinci basamaktan  $F(x, y, z, p, q) = 0$ ,  $G(x, y, z, p, q) = 0$ ;  $p = p(x, y, z)$ ,  $q = q(x, y, z)$  ise  $[F, G] = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, p)} + \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, q)} + p \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, p)} + q \frac{\partial(F, G)}{\partial(z, q)}$  ve  $[F, G]$ 'ye  $F$  ile  $G$ 'nin KROŞE'si denir.  $[F, G] = 0$  ise  $F$

ile  $G$  bağdaşabilir. Ortak çözüm  $dz = p dx + q dy$  tam integrale bulunan  $p$  ve  $q$  değerlerinin konulmasıyla bulunur.





### Charpit Metodu

Birinci Basamaktan  $F(x, y, z, p, q) = 0$  KTD'si için Lagrange Sistemi;

$$\frac{dx}{\underbrace{F_p}_1} = \frac{dy}{\underbrace{F_q}_2} = \frac{dz}{\underbrace{pF_p + qF_q}_3} = -\frac{dp}{\underbrace{F_x + pF_z}_4} = -\frac{dq}{\underbrace{F_y + qF_z}_5},$$

sadece bir tane ilk integral bulunur. Buradan bulunan

$p$  ve  $q$  değerleri  $dz = p(x, y, z, a)dx + q(x, y, z, a)dy$ 'da yerine konursa tam integrali elde edilir. Singuler integral için; tam integral ifadesinin  $a$ 'ya ve  $b$ 'ye göre türevleri alınır ve bulunan  $a$  ve  $b$  değerleri tam integralde yerlerine yerleştirilir.

### Birinci Basamaktan Özel Tip Denklemler

#### A) Sadece $p$ ve $q$ 'yu içeren denklemler

$F(p, q) = 0$  şeklindeki denklemlerde  $dp = 0$ 'dan  $p = a$  ilk integrali elde edilir.  $G = p - a = 0$  olup  $F(a, q)$ 'dan  $q = Q(a)$  yazılıp  $dz = pdx + qdy \Rightarrow dz = adx + Q(a)dy$  ifadesinin integrali alınırsa  $z = ax + Q(a)y + b$  olarak elde edilir.  $dq = 0$ 'dan da çözüme gidilebilir.

#### B) Bağımsız değişkenleri içermeyen denklemler

$F(z, p, q) = 0$  şeklindeki denklemlere karşılık gelen Charpit yardımcı sistemi  $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}$  olup  $p = aq$  ilk integrali elde edilir.

#### C) Değişkenlerine Ayrılabilir Denklemler

Birinci Basamaktan bir KTD  $f(x, p) = g(y, q)$  şeklinde yazılabiliyorsa ona değişkenlerine ayrılabilir denklemler denir. Lagrange sistemi  $\{1\}$  ile  $\{4\}$  çözülürse  $f(x, p) = a$ ,  $\{2\}$  ile  $\{5\}$  çözülünce  $g(y, q) = a$  bulunur.  $z = \int p(x, a)dx + \int q(y, q)dy + b$  ile genel çözüm bulunur.

#### D) Clairaut Denklemi

Birinci basamaktan bir KTD  $z = px + qy + f(p, q)$  ile ifade edilebiliyorsa ona Clairaut Denklemi denir. Charpit yardımcı sisteminden  $dp = 0 \Rightarrow p = a$ ,  $dq = 0 \Rightarrow q = b$  yazılabilir ve  $p$  ve  $q$ 'nin bu değerleri denklemden yerine konursa  $z = ax + by + f(a, b)$  tam integrali elde edilir.

### Özel Tip Denklemlere Dönüştürülebilir Denklemler

I)  $m$  ve  $n$  herhangi sabitler olmak üzere;  $F(x^m p, y^n q) = 0$  ... (1) tipindeki denklemler;

- $m \neq 1$  için  $x_1 = x^{1-m}$  dönüşümü uygulanırsa;  $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\underbrace{\partial x_1}_{p_1}} \cdot \frac{dx_1}{dx} = \frac{1-m}{x^m} p_1 \Rightarrow x^m p = (1-m)p_1$

- $m = 1$  için  $x_1 = \ln(x)$  dönüşümü uygulanırsa;  $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\underbrace{\partial x_1}_{p_1}} \cdot \frac{dx_1}{dx} \Rightarrow xp = p_1$

- $n \neq 1$  için  $y_1 = y^{1-n}$  dönüşümü uygulanırsa;  $y^n q = (1-n)q_1$

- $n = 1$  için  $y_1 = \ln y$  dönüşümü uygulanırsa;  $yq = q_1$

- Böylece  $m$  ve  $n$ 'lerin herbir durumunda (1) denk. i daima  $F_1(p_1, q_1) = 0$  özel şekline dönüştürülebilir.

II)  $k$  herhangi bir sabit olmak üzere;  $F(z^k p, z^k q) = 0$  ... (2) tipindeki denklemler;

- $k \neq -1$  için  $z_1 = z^{k+1}$  dönüşümü uygulanırsa;

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot \frac{dz}{dz_1} \Rightarrow \boxed{p = (k+1)z^k p_1} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial y} \cdot \frac{dz}{dz_1} \Rightarrow \boxed{q = (k+1)z^k q_1}$$

- $k = -1$  için  $z_1 = \ln z$  dönüşümü uygulanırsa;

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot \frac{dz}{dz_1} \Rightarrow \boxed{p = z p_1} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial y} \cdot \frac{dz}{dz_1} \Rightarrow \boxed{q = z q_1}$$

$k$ 'nin her durumunda (2) denklemi  $F(p_1, q_1) = 0$  özel şekline dönüşüyor.

III)  $m, n$  ve  $k$  herhangi reel sabitler olmak üzere;  $F(x^m z^k p, y^n z^k q) = 0$  ... (3) tipindeki denklemler;

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_1}{\partial x} \cdot \frac{dz_1}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{dz_1} = \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \cdot \frac{dz_1}{dz_1} \cdot \frac{dx_1}{dz_1} \quad \text{ve} \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z_1}{\partial y} \cdot \frac{dz_1}{dy_1} \cdot \frac{dy_1}{dz_1} = \frac{\partial z_1}{\partial y_1} \cdot \frac{dz_1}{dz_1} \cdot \frac{dy_1}{dz_1}$$

Bu tip denklemleri çözmek için I ve II'de verilen dönüşümler ardarda uygulanır. Yani türevleri hesaplanıp (3)'de yerine yazılır ve denklem  $F(p_1, q_1) = 0$  şekline dönüşür.

IV)  $F(z, x^m p, y^n q) = 0$  tipindeki denklemler;

Bunlara I'deki dönüşümler uygulanırsa  $F(z, p_1, q_1) = 0$  olur. Bu denklem bağımsız değişkenleri içermeyen denklemlere dönüşür.  $p_1 = a q_1$  dönüşümü ile çözüme gidilir.

V)  $f(x, z^k p) = g(y, z^k q)$  tipindeki denklemler; Bunlara II'deki dönüşümler uygulanırsa  $f_1(x, p_1) = g_1(y, q_1)$  değişkenlerine ayrılabilen özel tipden denklemlere dönüşür. Yukarıdaki C çözümü ile sonuca gidilir.

### Yüksek Basamaktan Lineer Kısmi Türevli Denklemler

#### **İkinci Basamaktan Lineer KTD:**

$$A(x, y) \underbrace{u_{xx}}_{D_x^2} + B(x, y) \underbrace{u_{xy}}_{D_x D_y} + C(x, y) \underbrace{u_{yy}}_{D_y^2} + D(x, y) \underbrace{u_x}_{D_x} + E(x, y) \underbrace{u_y}_{D_y} + Fu = G$$

Bu tür denklemlerin bazı özel durumlar dışında genel çözümünü elde etmek zordur.  $a, b, c, d, e, f$ 'ler sabitler olmak üzere;  $L = aD_x^2 + bD_x D_y + cD_y^2 + dD_x + eD_y + f$  olsun.

Eğer  $L = L_1 L_2 = L_2 L_1$  şeklinde yazılabiliyorsa;  $L_1 = a_1 D_x + b_1 D_y + c_1$  ve  $L_2 = a_2 D_x + b_2 D_y + c_2$  şeklinde çarpanlarına ayırırız. Burada  $L_1 u = 0$ 'ın çözümü  $u_1$  ve  $L_2 u = 0$ 'ın çözümü  $u_2$  olsun. Buradan  $Lu = 0$  denklemin genel çözümüdür.

Genel çözüm  $u = u_1 + u_2$  ise

$$u = \underbrace{e^{a_1 x} f_1(b_1 x - a_1 y)}_{u_1} + \underbrace{e^{a_2 x} f_2(b_2 x - a_2 y)}_{u_2}; a_1, a_2 \neq 0$$

$$u = \underbrace{e^{\frac{-c_1 y}{b_1}} f_1(x)}_{u_1} + \underbrace{e^{\frac{-c_2 y}{b_2}} f_2(x)}_{u_2}; a_1, a_2 = 0, f_1, f_2 \in C^2$$

### İkinci Basamaktan Lineer Denklemleri Sınıflandırma, Kanonik Formlar

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y) \dots (1)$$

II basamaktan lineer KTD'de

$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy}$  terimine (1) denkleminin esas kısmı denir ve denklemin tipini burası belirler.

$\Delta = B^2(x, y) - 4A(x, y) \cdot C(x, y)$  olsun.

$\Delta > 0$  ise (1) denklemi hiperbolik

$\Delta = 0$  ise (1) denklemi parabolik

$\Delta < 0$  ise (1) denklemi eliptik

Buradan  $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - B\left(\frac{dy}{dx}\right) + C = 0$  şeklinde kararistik denklemi elde edilir. Bu denklemin

$\frac{dy}{dx} = \frac{B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$  çözümü ile  $\left. \begin{array}{l} \xi = \xi(x, y) = c_1 \\ \eta = \eta(x, y) = c_2 \end{array} \right\}$  eğrileri elde edilir. Burada Jaqobien

$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$  olmalıdır.

$$\boxed{z_x = z_{\xi} \xi_x + z_{\eta} \eta_x} \text{ ve } \boxed{z_y = z_{\xi} \xi_y + z_{\eta} \eta_y}$$

$$z_x = \underbrace{z_{\xi}}_v \xi_x + \underbrace{z_{\eta}}_u \eta_x \text{ ve } z_y = \underbrace{z_{\xi}}_v \xi_y + \underbrace{z_{\eta}}_u \eta_y$$

$$z_{xx} = (v_{\xi} \xi_x + v_{\eta} \eta_x) \xi_x + z_{\xi} \xi_{xx} + (u_{\xi} \xi_x + u_{\eta} \eta_x) \eta_x + z_{\eta} \eta_{xx}$$

$$\boxed{z_{xx} = z_{\xi\xi} \xi_x^2 + z_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + z_{\xi} \xi_{xx} + z_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + z_{\eta\eta} \eta_x^2 + z_{\eta} \eta_{xx}}$$

$$z_{xy} = (v_{\xi} \xi_y + v_{\eta} \eta_y) \xi_x + z_{\xi} \xi_{xy} + (u_{\xi} \xi_y + u_{\eta} \eta_y) \eta_x + z_{\eta} \eta_{xy}$$

$$\boxed{z_{xy} = z_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + z_{\xi\eta} \eta_y \xi_x + z_{\xi} \xi_{xy} + z_{\xi\eta} \xi_y \eta_x + z_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + z_{\eta} \eta_{xy}}$$

$$z_{yy} = (v_{\xi} \xi_y + v_{\eta} \eta_y) \xi_y + z_{\xi} \xi_{yy} + (u_{\xi} \xi_y + u_{\eta} \eta_y) \eta_y + z_{\eta} \eta_{yy}$$

$$\boxed{z_{yy} = z_{\xi\xi} \xi_y^2 + z_{\xi\eta} \eta_y \xi_y + z_{\xi} \xi_{yy} + z_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + z_{\eta\eta} \eta_y^2 + z_{\eta} \eta_{yy}}$$

Bulunan değerler verilen denklemde yerine konulunca sadece  $\xi$  ve  $\eta$  içeren Kanonik Forma indirgenmiş denklem bulunur. Bu denklemin de integrali alınırsa  $z = \dots$ ,  $f, g \in c^2$  şeklinde çözüm bulunur. İntegralde eklenen  $c$  sabitleri  $f(\xi)$  şeklindedir. Burada  $\xi$  ve  $\eta$ 'ların yerine  $x$  ve  $y$  değerleri konularak genel çözüm bulunur.

### Isı Denklemi

$U_t - kU_{xx} = 0$  şeklinde tanımlanan denkleme ısı denklemi denir.

$$U(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad U(0, t) = 0, u(L, t) = 0, t \geq 0$$

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\lambda_n t} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}$$