

中国科学技术大学

硕士学位论文



残余引力波：引力子、真空与规则化

作者姓名： 王东刚

学科专业： 天体物理专业

导师姓名： 张杨 教授

完成时间： 二〇一六年五月

University of Science and Technology of China
A dissertation for master's degree



Relic Gravitational Waves: Gravitons, Vacuum and Regularization

Author :	<u>Dong-Gang Wang</u>
Speciality :	<u>Astrophysics</u>
Supervisor :	<u>Prof. Yang Zhang</u>
Finished Time :	<u>May, 2016</u>

中国科学技术大学学位论文原创性声明

本人声明所呈交的学位论文,是本人在导师指导下进行研究工作所取得的成果。除已特别加以标注和致谢的地方外,论文中不包含任何他人已经发表或撰写过的研究成果。与我一同工作的同志对本研究所做的贡献均已在论文中作了明确的说明。

作者签名: _____

签字日期: _____

中国科学技术大学学位论文授权使用声明

作为申请学位的条件之一,学位论文著作权拥有者授权中国科学技术大学拥有学位论文的部分使用权,即:学校有权按有关规定向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版,允许论文被查阅和借阅,可以将学位论文编入《中国学位论文全文数据库》等有关数据库进行检索,可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。本人提交的电子文档的内容和纸质论文的内容相一致。

保密的学位论文在解密后也遵守此规定。

☐ 公开 ☐ 保密 _____ 年

作者签名: _____

导师签名: _____

签字日期: _____

签字日期: _____

摘 要

残余引力波的扰动功率谱在高频部分会存在紫外发散问题，应该被消除掉。基于宇宙从暴涨到加速膨胀五个阶段的幂律膨胀行为，本文首先构建了描述残余引力波在宇宙中演化的严格解析解。然后利用此解析解，本文对谱的紫外发散问题进行了系统的研究。本文发现，今天的残余引力波由真空和引力子组成，其中真空部分在 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 频段占主导，而引力子部分在 $f < 10^{11}\text{Hz}$ 频段占主导。引力子由不同宇宙膨胀阶段间的转变产生，主要贡献来自于暴涨到再加热阶段的转变。本文利用弯曲时空量子场论中的绝热规则化来扣除真空部分导致的发散，其中对功率谱的发散扣除到第二绝热阶，而对能量密度谱和压强谱的发散扣除到第四绝热阶。之后，本文分别展示了三种可能的规则化方案：在观测时做规则化，在暴涨结束时做规则化，以及在出视界时做规则化。在第一种规则化方案中，我们需要引入高能标截断来扣除引力子导致的真空发散。本文发现三种规则化方案都给出了相似的谱型，而在暴涨时远在视界外定义的原初谱实际上并未受到影响。最后，本文还对规范不变的标量曲率扰动规则化做了讨论，并利用两种规则化方案进行研究，然后发现，标量谱指数、张标比以及单场慢滚暴涨的一致性关系均未受到影响。

关键词： 残余引力波，弯曲时空量子场论，紫外发散，绝热规则化，暴涨宇宙学

ABSTRACT

The spectrum of relic gravitational wave (RGW) contains high-frequency divergences, which should be removed. We present a systematic study of the issue, based on the exact RGW solution that covers the five stages, from inflation to the acceleration, each being a power law expansion. We show that the present RGW consists of vacuum dominating at $f > 10^{11}\text{Hz}$ and graviton dominating at $f < 10^{11}\text{Hz}$, respectively. The gravitons are produced by the four cosmic transitions, mostly by the inflation-reheating one. We perform adiabatic regularization to remove vacuum divergences in three schemes: at present, at the end of inflation, and at horizon-exit, to the 2-nd adiabatic order for the spectrum, and the 4-th order for energy density and pressure. In the first scheme a cutoff is needed to remove graviton divergences. We find that all three schemes yield the spectra of a similar profile, and the primordial spectrum defined far outside horizon during inflation is practically unaffected. We also regularize the gauge-invariant perturbed inflaton and the scalar curvature perturbation by the last two schemes, and find that the scalar spectra, the tensor-scalar ratio, and the consistency relation remain unchanged.

Keywords: Relic Gravitational Waves, Quantum Field Theory in Curved Spacetime, UV Divergence, Adiabatical Regularization, Inflationary Cosmology

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	III
目 录	V
第一章 绪论	1
第二章 宇宙学基础回顾	5
2.1 宇宙的背景演化	5
2.2 宇宙学扰动理论	7
第三章 残余引力波的产生与演化	9
3.1 残余引力波的产生：暴涨张量扰动与原初谱	9
3.2 残余引力波的原初功率谱	11
3.3 残余引力波在宇宙膨胀背景下的演化	14
第四章 残余引力波的分解：真空与引力子	21
4.1 宇宙膨胀背景下的引力子产生	21
4.2 引力波谱的分解	23
第五章 绝热规则化	27
5.1 弯曲时空量子场论中的真空发散与绝热规则化	27
5.2 功率谱的绝热规则化	28
5.3 能动张量的绝热规则化	29
第六章 几种可能的绝热规则化方案	33
6.1 观测时规则化	33
6.2 暴涨结束时规则化	35
6.3 原初扰动出视界时规则化	37
第七章 原初曲率扰动的规则化	41
7.1 一个具体的模型：幂律暴涨	41
7.2 原初曲率扰动及其规则化	42
7.3 规则化对可观测量的影响	44

第八章 总结与讨论	47
参考文献.....	49
致 谢.....	51
在读期间发表的学术论文与取得的研究成果.....	53

第一章 绪论

引力波是一百年前爱因斯坦广义相对论中的预言。在 2016 年 2 月 11 日，美国的激光干涉引力波天文台（LIGO）宣布探测到了两个黑洞绕转并合的过程中产生的引力波辐射 [1]。作为引力波存在的第一个直接证据，他们的发现开启了引力波天文学的大门，使我们在电磁波之外对宇宙中各种天文现象拥有了全新的探测手段，将会对天体物理和理论物理的发展产生深刻的影响。

通常我们认为，引力波可以由致密星体的绕转、并合产生，也可以来自于超新星的爆发、宇宙极早期的一级相变过程等等。而在现代宇宙学中，有一类特殊的引力波，它源自于宇宙极早期暴涨阶段的引力场量子涨落，一直留存到今天，所以被称作是残余引力波（RGW）[2–17]。由于其量子起源，残余引力波被认为更有可能帮助物理学家去发掘广义相对论和粒子物理标准模型之外的新物理，甚至揭开量子引力的奥秘。在经历了再加热、辐射为主、物质为主和加速膨胀这四个阶段的宇宙演化后，残余引力波成为现在宇宙中存在的一个统计背景。由于它在演化过程中几乎不受其他天体物理过程的影响 [18–23]，残余引力波携带了极早期宇宙中独特的信息。而且，由于它的谱横跨 $(10^{-18} - 10^{11})\text{Hz}$ 的频率范围，残余引力波已经成为各种频段引力波探测器的目标，比如说 LIGO[24]，Virgo[25]，GEO[26]，KAGRA[27]，LISA[28]，脉冲星计时阵列 (PTA)[29, 30]，WMAP[31, 32]，Planck[33]，BICEP2[34, 35] 以及极化激光束探测器 [36, 37]。

在暴涨期间，低频的残余引力波被拉到视界外，并保持不变， $h_k(\tau) = \text{const.}$ 。频段处于 $(10^{-18} - 10^{-16}\text{Hz})$ 之间的模式在红移 $z \sim 1100$ 时再次进入到视界中，并在宇宙微波背景辐射（CMB）上留下印记。其在探测范围 $l \sim (10 - 3000)$ 中的极化功率谱 C_l^{BB} 正是由于残余引力波而产生 [31, 33, 38–41]。另一方面，高频部分的模式 ($f > 10^{11}\text{Hz}$) 永远不会出视界，它们会随着宇宙的膨胀而衰减 $h_k(\tau) \propto 1/a(\tau)$ ，对应了残余引力波的真空部分。而残余引力波谱在高频部分会随频率增大 $\propto f^2$ ，进而导致自关联函数，能量密度和压强中的紫外发散现象。

这种真空发散也出现在弯曲时空的其他量子场中，比如暴涨子场以及度规扰动的标量部分。为了消除这些发散，我们通常在平坦时空量子场论中引入算符的正规排序，但这一方法在膨胀宇宙中不再适用，因为真空中某些特定的组分是有物理效应的。所以 L. Parker 和 S. A. Fulling 发展出了带有最小减除原理的绝热规则化来处理这一问题 [42–47]。该方法可以被应用到膨胀宇宙中的量子场上，所以对残余引力波也适用。利用绝热规则化，量子场的真空发散可以被有效的减除到需要的绝热阶，而真空中物理相关的部分被保留了下来。规则化后的残余引力波谱在高频被压低了下來，成为高频引力波探测器的目标 [36, 37]。

低频段的谱 ($10^{-18} - 10^{11}\text{Hz}$) 也可能被规则化修改。所以要给出一个精确结论, 我们需要详细讨论残余引力波的结构。

在文献中, 前人提出了不懂的规则化方案来处理暴涨期间量子场的绝热规则化问题 [48–55]。对于规则化后的原初谱以及定义在低频端的谱指数, 这些规则化方案得到了各不相同的结果。甚至, 对于绝热规则化是否可以消除真空发散这个问题, 目前也存在争议。先前的研究只考虑了暴涨阶段的谱, 但没有考虑今天的谱。而且, 这些研究都依赖于暴涨期间的慢滚近似 [56–61]。有时, 会掺杂一些不自洽的处理。比如, 在解扰动的演化方程时, 慢滚参数首先被认为是一个常数, 但之后在计算跑动谱指数时却允许它变化, 谱会在出视界时被定义, 而不是把原初谱定义在远离视界外。实际上, 这两种定义方式会导致巨大的差别。只有后一种才对应 CMB 观测。这些先前研究中的缺陷会导致最终原初谱, 以及其规则化时的不确定性。

本文将对膨胀宇宙中残余引力波的功率谱、能量密度和压强谱进行研究, 并利用绝热规则化的办法处理残余引力波真空的紫外发散问题。首先, 本文对整个宇宙的膨胀历史进行描述, 分成暴涨、重加热、辐射为主、物质为主以及今天的加速膨胀五个阶段, 其中每个阶段都可以用一个幂律的标度因子来表达 $a(\tau) \propto \tau^d$ (这里幂指数 d 为常数)。然后, 本文考察残余引力波在暴涨时的产生过程, 以及产生后在上述膨胀宇宙中的演化过程, 并得到了残余引力波覆盖整个膨胀历史的解析解。利用在任何时刻和波数都适用的解析谱和谱指数 n_t 与 α_t , 我们明确展示了上面提到了两个谱是如何不同的, 并得到了一个 n_t 和慢滚参数 ϵ 之间的一致性关系。然后我们将探讨今天的残余引力波作为量子场的结构, 将其分解成真空部分和引力子部分, 并得到在宇宙膨胀过程中产生的粒子数密度。我们发现真空部分在高频端 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 占主导, 引力子部分在低频端 $f < 10^{11}\text{Hz}$ 占主导, 不过二者都在一定程度上都会导致紫外发散。

接下来, 我们将应用绝热规则化的方法和最小减除原理来去除残余引力波的真空发散。我们将通过直接计算来证实, 二阶绝热抵销项足以消除谱真空部分的二次发散和对数发散, 而我们需要四阶绝热抵销项来能量密度和压强谱中存在的四次发散。为了得到收敛的今天残余引力波谱, 我们还要从引力子贡献部分中去除紫外发散。我们将展现三种规则化方案来处理真空发散问题, 分别是: 在今天做规则化, 在暴涨结束时做规则化, 以及出视界时做规则化。对于第一种方案, 我们对今天的功率谱、能量密度和压强谱的真空部分进行了绝热规则化, 对引力子导致的发散部分则是通过截断来扣除的。后两种方案都是对功率谱在暴涨期间进行规则化, 然后根据演化方程使其演化成今天的谱。规则化之后, 三种方案导致的残余引力波谱非常相似, 只有在第三种方案中会导致一个常系数的差异, 而这个常系数又可以被吸收到暴涨能标之中去。最后, 类比于对残余引力波的研究, 我们求出了一类规范不变暴涨子扰动和标量曲率扰动的严格解, 然后暴涨期间的规则化方案被推广到了标量扰动的情形。规则化

的谱并未受到绝热减除的影响，所以张标比 r 以及单场慢滚暴涨的一致性关系都保持不变。

第二章 宇宙学基础回顾

2.1 宇宙的背景演化

根据宇宙学原理，我们的宇宙在大尺度上是均匀各向同性的，而且今天精确的宇宙学观测表明宇宙的三维空间是平坦的。那么宇宙的时空背景可以用 Robertson-Walker (RW) 度规来描述

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

其中 $a(t)$ 为描述空间膨胀的标度因子。通常，我们可以把宇宙时 t 做一个坐标变换 $dt = a d\tau$ ，得到共形时 τ 下的 RW 度规

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j]. \quad (2.2)$$

把上述度规代入到爱因斯坦场方程中，我们得到了描述宇宙演化的两个 Friedmann 方程

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{H}' = -\frac{4\pi G}{3}a^2(\rho + 3p), \quad (2.4)$$

这里 $\mathcal{H} = a'/a$ 是共动哈勃因子， $'$ 表示对共形时间求导。联立上述两个式子，我们可以求出背景能量密度和压强所满足的连续性方程

$$\rho' = -3\mathcal{H}(\rho + p). \quad (2.5)$$

接下来，我们定义物态方程参数 $w \equiv p/\rho$ ，那么我们就可以通过上述几个方程求出不同物质形态占主导的情况下宇宙的演化行为。对于标准的 Λ CDM 宇宙学模型，我们知道宇宙中的能量组分有普通重子物质、辐射、暗物质和暗能量。比如说重子物质约占整个宇宙能量组分的 4.9%，暗物质约占 26.8%，物态方程参数满足 $w = 0$ ，由此我们可以解得在一个物质为主的宇宙中

$$a(\tau) \sim \tau^2, \quad \rho \sim a^{-3}. \quad (2.6)$$

而辐射的物态方程参数满足 $w = 1/3$ ，所以在辐射为主的宇宙中我们有

$$a(\tau) \sim \tau, \quad \rho \sim a^{-4}. \quad (2.7)$$

基于以上分析，我们可以推断，宇宙在今天的加速膨胀之前会有一个物质为主的阶段，再之前则是辐射为主，这就构成了标准热大爆炸宇宙学的宇宙演化历史。然而，标准热大爆炸宇宙学不能解释平直性疑难和视界疑难，也无法产生与微波背景辐射观测相吻合的原初扰动，这些问题导致了暴涨宇宙学的出现。

暴涨的基本图像是，在辐射为主阶段之前，宇宙经历了一个加速膨胀阶段，然后经过一个再加热阶段产生粒子，再进入热大爆炸宇宙学的膨胀过程。这样一来，宇宙的演化历史可以划分为五个阶段：暴涨、再加热、辐射为主、物质为主以及今天的加速膨胀。所以我们可以采用如下幂律形式的参数化来描述宇宙的演化历史。

对于暴涨阶段的标度因子，我们有

$$a(\tau) = l_0 |\tau|^{1+\beta}, \quad -\infty < \tau \leq \tau_1, \quad (2.8)$$

其中 l_0 和 β 是模型参数， τ_1 是暴涨结束的时间 [3, 16]。宇宙膨胀速度可以用哈勃参数来表述 $H = a'/a^2 = 1/l_0 |\tau|^{2+\beta}$ 。在特殊的德西特背景暴涨下， $\beta = -2$ ，所以我们有 $l_0^{-1} = H$ 。利用 CMB 对标量扰动谱的观测数据 [32]，我们有谱指数 $n_s = 0.9608 \pm 0.0080$ ，所以我们可以从 $n_s - 1 = 2\beta + 4$ 这个关系中推出， $\beta \simeq -2.02$ 。对于 $\beta \simeq -2$ ，(2.8) 式表达的膨胀是非常一般的，所以可以描述一类暴涨模型的背景演化。

对于再加热阶段的标度因子，我们取

$$a(\tau) = a_z |\tau - \tau_p|^{1+\beta_s}, \quad \tau_1 \leq \tau \leq \tau_s. \quad (2.9)$$

其中 $\beta_s = -0.3$ 。

在辐射为主阶段，标度因子是

$$a(\tau) = a_e (\tau - \tau_e), \quad \tau_s \leq \tau \leq \tau_2. \quad (2.10)$$

在物质为主阶段，标度因子是

$$a(\tau) = a_m (\tau - \tau_m)^2, \quad \tau_2 \leq \tau \leq \tau_E. \quad (2.11)$$

加速膨胀阶段一直持续到今天 τ_H 时刻，标度因子是

$$a(\tau) = l_H |\tau - \tau_a|^{-\gamma}, \quad \tau_E \leq \tau \leq \tau_H. \quad (2.12)$$

其中 $\gamma \simeq 2.1$ 来自于拟合 $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ 和 $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda$ 的 Λ CDM 标准宇宙学模型。

如上所述，五个阶段的标度因子都取了幂律形式。所以我们可以取标度因子 $a(\tau)$ 本身和它对时间的一阶导 $a'(\tau)$ 在五个阶段的四个连接点处连续。这里会有一个整体的归一化因子，本文中我们取 $|\tau_H - \tau_a| = 1$ ，今天的哈勃半径 $H_0^{-1} = l_H/\gamma = 9.257 \times 10^{28} h^{-1} \text{cm}$ ，其中 $h = 0.69$ 。如此一来，我们就固定了标度因子表达式中的参数。此外，对于连接点处的时间选取，我们在计算中利用下述约定：辐射为主到物质为主阶段的衔接发生在红移 $z = 3293$ [31]；暴涨的能标取 10^{16}Gev ；再加热阶段宇宙的膨胀倍数为 $a(\tau_s)/a(\tau_1) = 300$ ；所以在辐射为主阶段开始时，宇宙的能标约为 10^{13}Gev 。具体这些约定的选取细节详见文献 [15, 16]。

2.2 宇宙学扰动理论

现在我们对背景度规 (2.1) 做一阶微扰 $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^0 + \delta g_{\mu\nu}$, 那么在共动坐标下, 我们可以把扰动的时间部分和空间部分分离开来, 于是得到了

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left\{ (1 + 2A)d\tau^2 + 2B_i d\tau dx^i - [(1 - 2D)\delta_{ij} + 2E_{ij}] dx^i dx^j \right\}, \quad (2.13)$$

其中 A , B_i , D 和 E_{ij} 均为远小于 1 的一阶扰动量, 与背景度规相比可以忽略不计。 A 和 D 是三维空间中的标量, 而 B_i 和 E_{ij} 分别是三维空间中的矢量和张量。

上述度规形式虽为最一般的表达式, 但对扰动量的分解还并不彻底。比如说对于任意一个三维空间矢量, 我们可以分解成无散部分与无旋部分, 其中无旋部分又可以看成是某一三维空间标量的梯度, 而无散部分才是真正的矢量自由度。所以, 我们这里也可以对矢量扰动 B_i 继续做类似分解

$$B_i = B_i^S + B_i^V = -B_{,i} + B_i^V \quad (2.14)$$

其中 $B_i^V_{,i} = 0$ 。这样我们又引入了一个标量自由度 B 。

而对三维空间中的张量扰动我们也可以做类似的分解

$$E_{ij} = E_{ij}^S + E_{ij}^V + E_{ij}^T. \quad (2.15)$$

这里标量部分由 E 产生

$$E_{ij}^S = (\partial_i \partial_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} \nabla^2) E, \quad (2.16)$$

矢量部分由 E_i 贡献

$$E_{ij}^V = -\frac{1}{2} (E_{i,j} + E_{j,i}) \quad \text{其中} \quad E_{i,i} = 0, \quad (2.17)$$

张量部分我们用 h_{ij} 表示

$$E_{ij}^T = h_{ij} \quad \text{其中} \quad h_i^i = 0, \quad h_{ij,i} = 0. \quad (2.18)$$

如此一来, 我们可以把度规彻底的分解成三维空间中的标量扰动部分, 矢量扰动部分和张量扰动部分。其中标量扰动部分是

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left\{ (1 + 2A)d\tau^2 + 2B_{,i} d\tau dx^i - [(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j \right\}, \quad (2.19)$$

这里我们定义了曲率扰动

$$\psi = D + \nabla^2 E / 3 \quad (2.20)$$

现在标量扰动一共有四个分量, 但其中两个分量并不是真正物理的自由度, 可以被规范选取所消除掉。类似的我们也可以写下矢量扰动的度规, 但是在膨胀

的宇宙中，矢量扰动会随标度因子而衰减，所以通常不做考虑。而张量扰动部分即引力波。其度规可以写成

$$ds^2 = a^2(\tau)[d\tau^2 - (\delta_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j], \quad (2.21)$$

如上所述，这里张量扰动满足横波无迹条件 $h_{00} = h_{0i} = 0$ 。将其带入爱因斯坦场方程，我们得到引力波所满足的波动方程

$$\square h^{ij} = 0. \quad (2.22)$$

因为 h_{ij} 是对称张量，所以有 6 个独立分量，而横波无迹条件会消掉 4 个非物理的规范自由度，所以我们最后得到引力波有两个自由度，分别表示两种极化方式。对于每种极化而言，其满足的上述运动方程正是一个无质量标量场的克莱因-高登方程。

第三章 残余引力波的产生与演化

在本章中，我们首先回顾了残余引力波在暴涨背景下的产生问题，然后利用求得的原初谱讨论了功率谱和谱指数的定义。然后我们继续考虑残余引力波在膨胀宇宙背景下的演化行为，并利用连接条件求得演化后的残余引力波解析解以及今天的谱。

3.1 残余引力波的产生：暴涨张量扰动与原初谱

如上所述，宇宙学背景下的张量扰动（即引力波）有两种极化，而且都满足无质量标量场的克莱因-高登方程。接下来，本文讲讨论残余引力波在暴涨时期的产生问题。残余引力波的起源是暴涨时期引力场张量扰动的量子涨落，对此，我们采用弯曲时空量子场论中的处理方式，将时空背景视作经典的，但把扰动看作是在这个弯曲时空下演化的量子场。

那么对于残余引力波而言，每种极化都可以看作是一个自由的无质量标量场。为了对其量子化，首先我们通常进行如下的傅里叶分解

$$h_{ij}(\mathbf{x}, \tau) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=+, \times} \epsilon_{ij}^s(k) \left[a_{\mathbf{k}}^s h_k^s(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}}^{s\dagger} h_k^{s*}(\tau) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad \mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}, \quad (3.1)$$

这里两个极化张量满足

$$\epsilon_{ij}^s(k) \delta_{ij} = 0, \quad \epsilon_{ij}^s(k) k^i = 0, \quad \epsilon_{ij}^s(k) \epsilon_{ij}^{s'}(k) = \delta_{ss'}, \quad (3.2)$$

而且 $a_{\mathbf{k}}^s$ 和 $a_{\mathbf{k}}^{s\dagger}$ 是引力子的湮灭和产生算符，满足如下正则对易关系

$$[a_{\mathbf{k}}^s, a_{\mathbf{k}'}^{r\dagger}] = \delta_{sr} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (3.3)$$

对于残余引力波而言，我们通常假定两种极化模式 h_k^+ 和 $h_k^\times$ 是独立的而且统计上是等价的，所以，上标 $s = +, \times$ 可以丢掉，而波动方程就变成了

$$h_k''(\tau) + 2 \frac{a'(\tau)}{a(\tau)} h_k'(\tau) + k^2 h_k(\tau) = 0. \quad (3.4)$$

进一步设

$$h_k(\tau) = A u_k(\tau) / a(\tau), \quad (3.5)$$

这里 A 是归一化因子，模函数 u_k 满足如下波动方程

$$u_k''(\tau) + \left[k^2 - \frac{a''(\tau)}{a(\tau)} \right] u_k(\tau) = 0. \quad (3.6)$$

在暴涨期间，我们有标度因子 (2.8)，此时方程 (3.6) 变为

$$u_k'' + \left[k^2 - \frac{(1+\beta)\beta}{\tau^2} \right] u_k = 0, \quad (3.7)$$

此方程有如下通解

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{x}{2k}} [a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)], \quad -\infty < \tau \leq \tau_1, \quad (3.8)$$

其中 $x \equiv k|\tau|$, 系数 a_1 和 a_2 由暴涨期间的初条件选取所决定。注意 $H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) = H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)*}(x)$ 。通常我们选取

$$a_1 = 0, \text{ and } a_2 = -ie^{-i\pi\beta/2}, \quad (3.9)$$

此时模函数变为

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{x}{2k}} a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x), \quad (3.10)$$

它在高频极限 $k \rightarrow \infty$ 下回到闵可夫斯基平直时空下的正频模

$$u_k \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau}. \quad (3.11)$$

这个解也可以等价的写成贝塞尔函数的形式

$$u_k = \sqrt{\frac{x}{2k}} [A_1 J_{\frac{1}{2}+\beta}(x) + A_2 J_{-(\frac{1}{2}+\beta)}(x)], \quad -\infty < \tau \leq \tau_1, \quad (3.12)$$

其中系数 $A_1 = -\frac{i}{\cos\beta\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{i\pi\beta/2}$, $A_2 = iA_1 e^{-i\pi\beta}$ [16]。

接下来, 我们把残余引力波看作是海森伯表象下随时间演化的量子场, 那么量子态所生存的 Fock 空间就不再随时间变化。除了方程 (3.10) 的选择, 我们进一步假设量子真空态在暴涨期间由态矢量 $|0\rangle$ 描述, 而且对于 $s = +, \times$ 和所有的波数 $\mathbf{k}$, 满足

$$a_{\mathbf{k}}^s |0\rangle = 0, \quad (3.13)$$

即在初始时刻是没有引力子存在的, 但暴涨时却存在残余引力波的量子涨落 (真空能)。方程 (3.5) 中的系数 A 可以由量子归一化条件来确定: 在暴涨期间, 残余引力波的每一个 $\mathbf{k}$ -模式与极化在高频极限下都有如下的零点真空能 $\frac{1}{2}\hbar\omega$, 由此我们得到

$$A \equiv \sqrt{32\pi G} = \frac{2}{M_{Pl}}, \quad (3.14)$$

其中 $M_{Pl} = 1/\sqrt{8\pi G}$ 是普朗克质量。因此, 暴涨期间的残余引力波解析解可以完整的写成

$$h_k(\tau) = \frac{\sqrt{32\pi G}}{l_0|\tau|^{1+\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{x}{2k}} (-ie^{-i\pi\beta/2}) H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x), \quad -\infty < \tau \leq \tau_1. \quad (3.15)$$

现在暴涨时期的初条件已由 (3.13) 和 (3.15) 式完全确定, 这个初条件的选取又被称作是 Bunch-Davies 真空态。

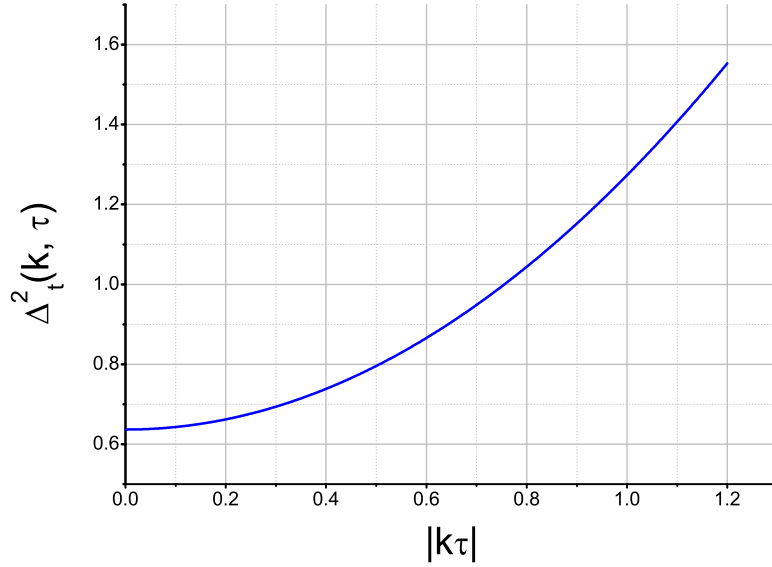


图 3.1 $\beta = -2$ 时残余引力波谱 $\Delta_t^2(k, \tau)$ 的形状。在 $k\tau = 0$ 时，谱是平的；但在 $k|\tau| = 1$ 时，有 $\propto k^1$ 的斜率。

3.2 残余引力波的原初功率谱

这里我们定义算符 $h_{ij}h^{ij}$ 的期望值为残余引力波的自关联函数，

$$\langle 0 | h^{ij}(\mathbf{x}, \tau) h_{ij}(\mathbf{x}, \tau) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (|h_k^+|^2 + |h_k^\times|^2), \quad (3.16)$$

其中我们利用了 3.1) (3.2) (3.3) 式。而功率谱就是两点关联函数的傅里叶变换

$$\int_0^\infty \Delta_t^2(k, \tau) \frac{dk}{k} \equiv \langle 0 | h^{ij}(\mathbf{x}, \tau) h_{ij}(\mathbf{x}, \tau) | 0 \rangle. \quad (3.17)$$

所以说我们可以得到

$$\Delta_t^2(k, \tau) = 2 \frac{k^3}{2\pi^2} |h_k(\tau)|^2, \quad (3.18)$$

这里因子 2 来自于残余引力波两种极化 $+$, $\times$. 在引力波探测的文献中，通常会采用特征幅度这个物理量 $h(k, \tau) = \sqrt{\Delta_t^2(k, \tau)}$ [62, 63]。功率谱的上述定义可以在从暴涨到加速膨胀的任何时间适用。注意，在平坦时空背景下由于时间平移不变性的存在，谱独立于时间；而在膨胀宇宙的背景下，残余引力波谱 (3.18) 是在随时间演化的。将 (3.15) 式代入到 (3.18) 中，我们得到暴涨期间的严格解析谱

$$\Delta_t^2(k, \tau) = 2 \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} \frac{4}{M_{Pl}^2} |u_k(\tau)|^2 = \frac{k^{2(\beta+2)}}{2\pi l_0^2 M_{Pl}^2} x^{-(2\beta+1)} H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x) H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x) \quad (3.19)$$

图 3.1 给出了谱 $\Delta_t^2(k, \tau)$ 随 $x = k|\tau|$ 变换的行为。同时从 (3.19) 式，我们也可以得到相应的谱指数

$$n_t(k, \tau) \equiv \frac{d \ln \Delta_t^2}{d \ln k} = 2\beta + 4 - x \frac{H_{\beta+\frac{3}{2}}^{(2)}(x)}{H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)} - x \frac{H_{\beta+\frac{3}{2}}^{(1)}(x)}{H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)}, \quad (3.20)$$

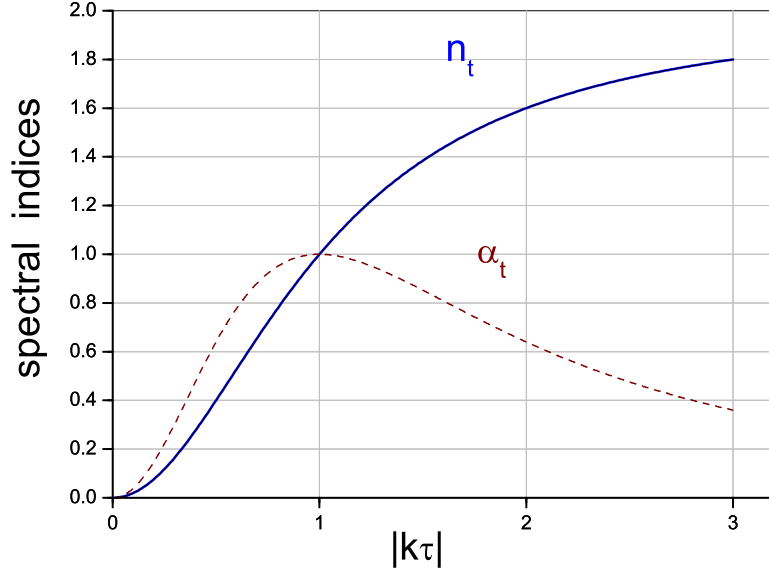


图 3.2 谱指数 n_t 和 α_t 随 $k|\tau|$ 的变化。注意在 $k|\tau| = 0$ 时 $n_t = \alpha_k = 0$ ，但在 $k|\tau| = 1$ 时 $n_t = \alpha_k = 1$ 。

$$\alpha_t(k, \tau) \equiv \frac{d^2 \ln \Delta_t^2}{d(\ln k)^2} = (2\beta + 1)x \frac{H_{\beta+\frac{3}{2}}^{(2)}(x)}{H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)} - x^2 \left[1 + \left(\frac{H_{\beta+\frac{3}{2}}^{(2)}(x)}{H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x)} \right)^2 \right] + (2\beta + 1)x \frac{H_{\beta+\frac{3}{2}}^{(1)}(x)}{H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)} - x^2 \left[1 + \left(\frac{H_{\beta+\frac{3}{2}}^{(1)}(x)}{H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x)} \right)^2 \right]. \quad (3.21)$$

在暴涨期间，对于固定的参数 β ，(3.20) 和 (3.21) 式在长波极限 $x \ll 1$ 下给出

$$n_t \simeq 2\beta + 4 - \frac{2}{2\beta + 3}x^2 + O(x^3), \quad (3.22)$$

$$\alpha_t \simeq -\frac{4}{2\beta + 3}x^2 + O(x^3). \quad (3.23)$$

图 3.2 绘出了 n_t 和 α_t 随 x 的变化。这些结果对一类标度因子满足 $a(\tau) \propto |\tau|^{1+\beta}$ 的暴涨模型适用。

原初谱在暴涨期间扰动远远出视界之后定义。在长波极限下，残余引力波的解 (3.15) 可以渐进展开为

$$h_k(\tau) = \frac{\sqrt{8\pi^2 G}}{l_0} \frac{-ie^{i\beta\pi/2}}{\Gamma(\beta + \frac{3}{2}) \cos \beta\pi} \left(\frac{k}{2} \right)^{\beta+\frac{1}{2}} + O(k^{\beta+\frac{3}{2}}), \quad (3.24)$$

所以原初谱就是

$$\Delta_t^2(k) \equiv \Delta_t^2(k, \tau)|_{k \ll 1/|\tau|} = a_t^2 \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 k^{2\beta+4} \propto k^{2\beta+4}, \quad (3.25)$$

其中 $a_t = \sqrt{\pi}/2^{\beta+1} |\Gamma(\beta + \frac{3}{2}) \cos \beta\pi| \simeq 1$ 。注意 (3.24) 式和 (3.25) 式在长波极限下是独立于时间 τ 的。谱的斜率 (3.25) 式依赖于暴涨的参数 β 。在严格德西特

暴涨的情况下，我们有 $\beta = -2$ 且 $a_t = 1$ ，(3.25) 式回到了标度不变的平谱 [58]

$$\Delta_t^2(k) = \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 + O(k^2). \quad (3.26)$$

$\beta = -2.0125$ 的原初谱 $\Delta_t(k)$ 如3.3中顶部曲线所示。在长波极限 $k \rightarrow 0$ 下，我们也可以得到谱指数的表达式

$$n_t \equiv \frac{d \ln \Delta_t^2}{d \ln k} \Big|_{k \rightarrow 0} = 2\beta + 4, \quad (3.27)$$

$$\alpha_t \equiv \frac{d^2 \ln \Delta_t^2}{d(\ln k)^2} \Big|_{k \rightarrow 0} = 0. \quad (3.28)$$

α_t 的取值是跟慢滚近似的结果不同的 [60, 61]。我们同样可以引入慢滚参数

$$\epsilon \equiv -H'/aH^2, \quad (3.29)$$

其取值远远小于 1。求解 (3.29) 得到

$$\epsilon = \frac{\beta + 2}{\beta + 1}. \quad (3.30)$$

这里 ϵ 可正可负，取决于 β 的取值。这就推广了单场慢滚暴涨模型 $\epsilon > 0$ 的结果 [58]。将 (3.30) 代入 (3.27) 中，我们得到

$$n_t = \frac{-2\epsilon}{1 - \epsilon}, \quad (3.31)$$

此式推广了慢滚近似下 $n_t = -2\epsilon$ 的结果。在 ϵ 非常小，其高阶项可以忽略不计的情况下上式回到慢滚。

对于谱和谱指数，这里我们进一步指出前人文献中某些不自洽的处理。例如，有时谱和谱指数会在出视界 $k|\tau| = 1$ 时定义 [58, 60, 61]。然而，这会导致

$$\Delta_t^2(k)|_{k|\tau| \simeq 1} = \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 (2x + O(x-1)^2), \quad (3.32)$$

以及如图3.2所示，谱指数变为 $n_t \simeq 1$, and $\alpha_t \simeq 1$ ，与式 (3.25)、(3.27) 和 (3.28) 的结果完全不同。（此区别对原初标量扰动也适用，对此我们将在第七章中讨论。）从观测的角度说，在出视界 $k|\tau| = 1$ 时定义谱和谱指数是不正确的。从 CMB 各项异性和极化的解析计算中我们得知 [64–66]，多级数 l 处的功率谱 C_l^{XX} 与波数 k 处的原初功率谱满足如下关系

$$C_l^{TT} \propto |h_k(\tau_d)|_{k=l/\tau_H}^2, \quad C_l^{EE}, C_l^{BB} \propto |\dot{h}_k(\tau_d)|_{k=l/\tau_H}^2,$$

其中 τ_d 是 CMB 形成的复合期时间，对应红移 $z \sim 1100$ 。因为在谱 C_l^{XX} 中我们通常取 $l \sim (10 - 3000)$ [31, 33, 39–41]，那么对应的波数也就是 [65, 66]

$$k \sim l/\tau_H \sim l \sim (10 - 3000). \quad (3.33)$$

其中, 在 τ_d 时刻重新进入世界的波数是 $k(\tau_d - \tau_m) = 1$, 即 $k \simeq 26$ 。而 (3.33) 式给出的波数 k 在暴涨时期远在视界之外, 例如, 他们在暴涨结束的时刻 τ_1 给出 $k|\tau_1| \sim (6.4 \times 10^{-29} - 9.6 \times 10^{-26}) \ll 1$ 。这些模式是被公式 (3.24) 和 (3.25) 描述的。因此, 我们的结论是, 谱和谱指数应该在长波极限下定义, 而在出视界时定义是不对的。

原初谱的整体幅度 (3.25) 是由暴涨期间的膨胀率也就是哈勃参数 H 来确定的, 而哈勃参数又跟暴涨的能量密度联系在一起 $H^2 = 8\pi G\rho/3$ 。在考虑观测时, 我们通常把谱 (3.25) 写作 [67]

$$\Delta_t(k) = \Delta_R r^{1/2} \left(\frac{k}{k_0} \right)^{\frac{n_t}{2} + \frac{1}{4} \alpha_t \ln(\frac{k}{k_0})}, \quad (3.34)$$

其中 k_0 是 CMB 观测所取的基准共动波数, 对应物理的波长 $k_0/a(\tau_H) = 0.002 Mpc^{-1}$, 而 Δ_R 则是由观测确定的曲率扰动谱 [68] $\Delta_R^2 = (2.464 \pm 0.072) \times 10^{-9}$, $r \equiv \Delta_t^2(k_0)/\Delta_R^2(k_0)$ 是张标比。最新对 BICEP2/Keck Array 和 Planck 数据的联合分析给出, $r < 0.07$ [35, 69]。

3.3 残余引力波在宇宙膨胀背景下的演化

如第二章中所述, 对于宇宙膨胀的每个阶段, 即暴涨、再加热、辐射为主、物质为主和加速膨胀, 宇宙的标度因子都可以参数化为一个幂律的形式 $a(\tau) \propto \tau^d$, 这里 d 为常数 [3, 4, 16], 那么方程 (3.6) 的严格解析解可以写成是两个汉克尔函数的叠加,

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{2k}} [C_1 H_{d-\frac{1}{2}}^{(1)}(\sigma) + C_2 H_{d-\frac{1}{2}}^{(2)}(\sigma)], \quad (3.35)$$

其中 $\sigma = k\tau$, 而 C_1 和 C_2 是由宇宙相邻两个阶段连接点处的连接条件 (u_k 和 u'_k 连续) 决定的。这样我们就可以得到宇宙整个演化过程中的残余引力波解析解 $h_k(\tau)$ [16]。接下来我们就由连接条件来给出各个阶段连接系数详细的表达式。注意, 某些宇宙演化中的物理现象, 比如中微子自由流 [18–20]、QCD 相变以及正负电子湮灭 [23] 都会对残余引力波的幅度产生轻微的变化, 在本文的研究中, 我们忽略这些效应的影响。

再加热阶段: 引力波波动方程 (3.6) 在此阶段的通解为

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{t}{2k}} [b_1(k) H_{\beta_s+\frac{1}{2}}^{(1)}(t) + b_2(k) H_{\beta_s+\frac{1}{2}}^{(2)}(t)], \quad \tau_1 < \tau \leq \tau_s, \quad (3.36)$$

其中 $t = k(\tau - \tau_p)$ 。两个系数 b_1 和 b_2 是由 τ_1 时刻的连接条件决定的, 即暴涨期间的模函数与再加热期间的模函数在衔接点出连续, 其一阶导也连续。这样我

们求得

$$\begin{aligned}
 b_1(k) &= \Delta_b^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{x_1}{t_1}} \left[a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x_1) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x_1) \right] \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2\sqrt{t_1}} H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(t_1) + \sqrt{t_1} H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)'}(t_1) \right] \\
 &\quad - H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(t_1) \left[\frac{1}{2\sqrt{x_1}} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x_1) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x_1) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{x_1} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)'}(x_1) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)'}(x_1) \right) \right] \right\}, \quad (3.37)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_2(k) &= \Delta_b^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{x_1}{t_1}} \left[a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x_1) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x_1) \right] \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2\sqrt{t_1}} H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(t_1) + \sqrt{t_1} H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)'}(t_1) \right] \\
 &\quad - H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(t_1) \left[\frac{1}{2\sqrt{x_1}} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(x_1) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(x_1) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{x_1} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)'}(x_1) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)'}(x_1) \right) \right] \right\}, \quad (3.38)
 \end{aligned}$$

$$\Delta_b = \sqrt{t_1} \left[H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(t_1) H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)'}(t_1) - H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)'}(t_1) H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(t_1) \right].$$

其中我们取 $x_1 = k\tau_1$ 且 $t_1 = k(\tau_1 - \tau_p)$, 而系数 a_1 和 a_2 是由暴涨时的初条件 (3.9) 给出的。在高频极限 $k \rightarrow \infty$ 下

$$b_1(k) = i \left(\frac{\beta(\beta+1)}{4x_1^2} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_1^2} \right) e^{-i(x_1+t_1)+i\pi\beta+i\pi\beta_s/2} + \mathcal{O}(k^{-3}) \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
 b_2(k) &= -ie^{-i(x_1-t_1)+i\pi\beta-i\pi\beta_s/2} \left(1 - i \frac{\beta(\beta+1)}{2x_1} + i \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_1} - \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{8x_1^2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{8t_1^2} + \frac{\beta(\beta+1)\beta_s(\beta_s+1)}{4x_1 t_1} \right) + \mathcal{O}(k^{-3}) \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

同理, 对接下来的辐射为主阶段, 我们有通解

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{y}{2k}} [c_1(k) H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y) + c_2(k) H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y)], \quad \tau_s < \tau \leq \tau_2, \quad (3.41)$$

其中 $y = k(\tau - \tau_e)$, 而 c_1 和 c_2 如下

$$\begin{aligned}
 c_1(k) &= \Delta_c^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{t_s}{y_s}} \left[b_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(t_s) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(t_s) \right] \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2\sqrt{y_s}} H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y_s) + \sqrt{y_s} H_{\frac{1}{2}}^{(2)'}(y_s) \right] \\
 &\quad - H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y_s) \left[\frac{1}{2\sqrt{t_s}} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(t_s) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(t_s) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{t_s} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)'}(t_s) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)'}(t_s) \right) \right] \right\}, \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c_2(k) &= \Delta_b^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{t_s}{y_s}} \left[a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(t_s) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(t_s) \right] \right. \\
 &\quad \times \left[\frac{1}{2\sqrt{y_s}} H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y_s) + \sqrt{y_s} H_{\frac{1}{2}}^{(1)'}(y_s) \right] \\
 &\quad - H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y_s) \left[\frac{1}{2\sqrt{t_s}} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)}(t_s) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)}(t_s) \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \sqrt{t_s} \left(a_1 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(1)'}(t_s) + a_2 H_{\beta+\frac{1}{2}}^{(2)'}(t_s) \right) \right] \right\}, \quad (3.43)
 \end{aligned}$$

$$\Delta_c = \sqrt{y_s} \left[H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y_s) H_{\frac{1}{2}}^{(2)'}(y_s) - H_{\frac{1}{2}}^{(1)'}(y_s) H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y_s) \right].$$

其中 $t_s = k(\tau_s - \tau_p)$, $y_s = k(\tau_s - \tau_e)$ 。在高频极限 $k \rightarrow \infty$ 下

$$\begin{aligned} c_1(k) = & i \left(\frac{\beta(\beta+1)}{4x_1^2} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_1^2} \right) e^{-i(x_1+t_1-t_s+y_s)+i\pi\beta} \\ & + i \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_s^2} e^{-i(x_1-t_1+t_s+y_s)+i\pi\beta} + \mathcal{O}(k^{-3}), \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} c_2(k) = & -ie^{-i(x_1-t_1+t_s-y_s)+i\pi\beta} \left(1 - i \frac{\beta(\beta+1)}{2x_1} + i \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_1} - i \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_s} \right. \\ & - \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{8x_1^2} - \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{8t_1^2} - \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{8t_s^2} + \frac{\beta(\beta+1)\beta_s(\beta_s+1)}{4x_1t_1} \\ & \left. - \frac{\beta(\beta+1)\beta_s(\beta_s+1)}{4x_1t_s} + \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{4t_1t_s} \right) + \mathcal{O}(k^{-3}). \end{aligned} \quad (3.45)$$

物质为主阶段模函数为

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{z}{2k}} [d_1(k) H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(z) + d_2(k) H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z)], \quad \tau_2 < \tau \leq \tau_E, \quad (3.46)$$

其中 $z = k(\tau - \tau_m)$ 。两个待定系数 d_1 和 d_2 如下

$$\begin{aligned} d_1(k) = & \Delta_d^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{y_2}{z_2}} \left[b_1 H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y_2) + a_2 H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y_2) \right] \right. \\ & \times \left[\frac{1}{2\sqrt{y_s}} H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z_2) + \sqrt{z_2} H_{\frac{3}{2}}^{(2)'}(z_2) \right] \\ & - H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z_2) \left[\frac{1}{2\sqrt{y_2}} \left(a_1 H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y_2) + a_2 H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y_2) \right) \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{y_2} \left(a_1 H_{\frac{1}{2}}^{(1)'}(y_2) + a_2 H_{\frac{1}{2}}^{(2)'}(y_2) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} d_2(k) = & \Delta_d^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{y_2}{z_2}} \left[a_1 H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y_2) + a_2 H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y_2) \right] \right. \\ & \times \left[\frac{1}{2\sqrt{z_2}} H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(y_s) + \sqrt{z_2} H_{\frac{3}{2}}^{(1)'}(z_2) \right] \\ & - H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(z_2) \left[\frac{1}{2\sqrt{y_2}} \left(a_1 H_{\frac{1}{2}}^{(1)}(y_2) + a_2 H_{\frac{1}{2}}^{(2)}(y_2) \right) \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{y_2} \left(a_1 H_{\frac{1}{2}}^{(1)'}(y_2) + a_2 H_{\frac{1}{2}}^{(2)'}(y_2) \right) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\Delta_d = \sqrt{z_2} \left[H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(z_2) H_{\frac{3}{2}}^{(2)'}(z_2) - H_{\frac{3}{2}}^{(1)'}(z_2) H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z_2) \right].$$

其中 $z_2 = k(\tau_2 - \tau_m)$, $y_2 = k(\tau_2 - \tau_e)$ 。在高频极限 $k \rightarrow \infty$ 下,

$$\begin{aligned} d_1(k) = & - \left(\frac{\beta(\beta+1)}{4x_1^2} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_1^2} \right) e^{-i(x_1+t_1-t_s+y_s-y_2+z_2)+i\pi\beta} \\ & - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_s^2} e^{-i(x_1-t_1+t_s+y_s-y_2+z_2)+i\pi\beta} \\ & + \frac{1}{2z_2^2} e^{-i(x_1-t_1+t_s-y_s+y_2+z_2)+i\pi\beta} + \mathcal{O}(k^{-3}), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
 d_2(k) = & -e^{-i(x_1-t_1+t_s-y_s+y_2-z_2)+i\pi\beta} \left(1 - i\frac{\beta(\beta+1)}{2x_1} + i\frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_1} \right. \\
 & -i\frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_s} + i\frac{1}{z_2} - \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{8x_1^2} - \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{8t_1^2} - \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{8t_s^2} \\
 & -\frac{1}{2z_2^2} + \frac{\beta(\beta+1)\beta_s(\beta_s+1)}{4x_1t_1} - \frac{\beta(\beta+1)\beta_s(\beta_s+1)}{4x_1t_s} + \frac{\beta(\beta+1)}{2x_1z_2} \\
 & \left. + \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{4t_1t_s} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_1z_2} + \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_sz_2} \right) + \mathcal{O}(k^{-3}). \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

最后对于当前的加速膨胀阶段，我们有模函数

$$u_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{s}{2k}} [e^{-i\pi\gamma/2} \beta_k H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(1)}(s) + e^{i\pi\gamma/2} \alpha_k H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(2)}(s)], \quad \tau_E < \tau \leq \tau_H, \quad (3.51)$$

其中 $s \equiv k(\tau - \tau_a)$ 。而系数 β_k, α_k 如下

$$\begin{aligned}
 e^{-i\pi\gamma/2} \beta_k = & \Delta_e^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{z_E}{s_E}} \left[d_1 H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(z_E) + d_2 H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z_E) \right] \right. \\
 & \times \left[\frac{1}{2\sqrt{s_E}} H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(2)}(s_E) + \sqrt{s_E} H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(2)'}(s_E) \right] \\
 & - H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(2)}(s_E) \left[\frac{1}{2\sqrt{z_E}} \left(d_1 H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(z_E) + d_2 H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z_E) \right) \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{z_E} \left(d_1 H_{\frac{3}{2}}^{(1)'}(z_E) + d_2 H_{\frac{3}{2}}^{(2)'}(z_E) \right) \right] \right\}, \quad (3.52)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{i\pi\gamma/2} \alpha_k = & \Delta_e^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{z_E}{s_E}} \left[d_1 H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(z_E) + d_2 H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z_E) \right] \right. \\
 & \times \left[\frac{1}{2\sqrt{s_E}} H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(1)}(s_E) + \sqrt{s_E} H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(1)'}(s_E) \right] \\
 & - H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(1)}(s_E) \left[\frac{1}{2\sqrt{z_E}} \left(d_1 H_{\frac{3}{2}}^{(1)}(z_E) + d_2 H_{\frac{3}{2}}^{(2)}(z_E) \right) \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{z_E} \left(d_1 H_{\frac{3}{2}}^{(1)'}(z_E) + d_2 H_{\frac{3}{2}}^{(2)'}(z_E) \right) \right] \right\}, \quad (3.53)
 \end{aligned}$$

$$\Delta_e = \sqrt{s_E} \left[H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(1)}(s_E) H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(2)'}(s_E) - H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(1)'}(s_E) H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(2)}(s_E) \right], \quad (3.54)$$

其中 $s_E = k(\tau_E - \tau_a)$ ， $z_E = k(\tau_E - \tau_m)$ 。在高频极限 $k \rightarrow \infty$ 下， β_k, α_k 有如下渐近展开：

$$\begin{aligned}
 \beta_k = & \left(\frac{\beta(\beta+1)}{4x_1^2} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_1^2} \right) e^{i(x_1+t_1-t_s+y_s-y_2+z_2-z_E+s_E)-i\pi\beta} \\
 & + \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_s^2} e^{i(x_1-t_1+t_s+y_s-y_2+z_2-z_E+s_E)+i\pi\beta} \\
 & - \frac{1}{2z_2^2} e^{i(x_1-t_1+t_s-y_s+y_2+z_2-z_E+s_E)+i\pi\beta} \\
 & + \left(\frac{1}{2z_E^2} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{4s_E^2} \right) e^{i(x_1-t_1+t_s-y_s+y_2+z_2-z_E+s_E)+i\pi\beta} + \mathcal{O}(k^{-3}) \quad (3.55)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_k = & e^{-i(x_1-t_1+t_s-y_s+y_2-z_2+z_E-s_E)+i\pi\beta} \left(1 - i\frac{\beta(\beta+1)}{2x_1} + i\frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_1} \right. \\
 & - i\frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_s} + i\frac{1}{z_2} - i\frac{1}{z_E} + i\frac{\gamma(\gamma+1)}{2s_E} - \frac{\beta^2(\beta+1)^2}{8x_1^2} - \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{8t_1^2} \\
 & - \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{8t_s^2} - \frac{1}{2z_2^2} - \frac{1}{2z_E^2} - \frac{\gamma^2(\gamma+1)^2}{s_E^2} + \frac{\beta(\beta+1)\beta_s(\beta_s+1)}{4x_1t_1} \\
 & - \frac{\beta(\beta+1)\beta_s(\beta_s+1)}{4x_1t_s} + \frac{\beta(\beta+1)}{2x_1z_2} - \frac{\beta(\beta+1)}{2x_1z_E} + \frac{\beta(\beta+1)\gamma(\gamma+1)}{4x_1s_E} \\
 & + \frac{\beta_s^2(\beta_s+1)^2}{4t_1t_s} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_1z_2} + \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_1z_E} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)\gamma(\gamma+1)}{4t_1s_E} \\
 & + \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_sz_2} - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{2t_sz_E} + \frac{\beta_s(\beta_s+1)\gamma(\gamma+1)}{4t_ss_E} + \frac{1}{z_2z_E} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{2z_2s_E} \\
 & \left. + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2z_Es_E} \right) + \mathcal{O}(k^{-3}). \tag{3.56}
 \end{aligned}$$

由此我们可以用 (3.19) 式得到残余引力波今天的谱

$$\Delta_t^2(k, \tau_H) = 2 \frac{k^3}{2\pi^2 a^2(\tau_H)} \frac{4}{M_{Pl}^2} |u_k(\tau_H)|^2, \tag{3.57}$$

其中今天加速膨胀阶段的模函数 $u_k(\tau_H)$ 即上文中所求的 (3.51) 式。图3.3中最下方的曲线展示了今天的谱 $\Delta_t(k, \tau_H)$ 。注意，在低频端 $f < 10^{-18}\text{Hz}$ 处，今天的谱 $\Delta_t(k, \tau_H)$ 和原初谱 $\Delta_t(k)$ 是重合在一起的，而且都是标度不变的平谱。这些引力波的波长比今天宇宙的世界还要大，所以依然没有进视界，谱保持不变 $h_k \simeq$ 。在高频端 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 处，谱的行为如图3.3所示， $\Delta_t^2(f, \tau_H) \propto f^2$ 。这些高频模式自暴涨以来从来没有出过视界，所以他们的幅度是在随宇宙膨胀而下降的 $h_k \propto 1/a(\tau)$ 。这种谱在高频的增长行为会导致自关联函数 (3.17) 发散 $\langle 0|h^{ij}h_{ij}|0\rangle$ ，这就是本文的主要议题，我们将在下面的章节中对其进行详细讨论。

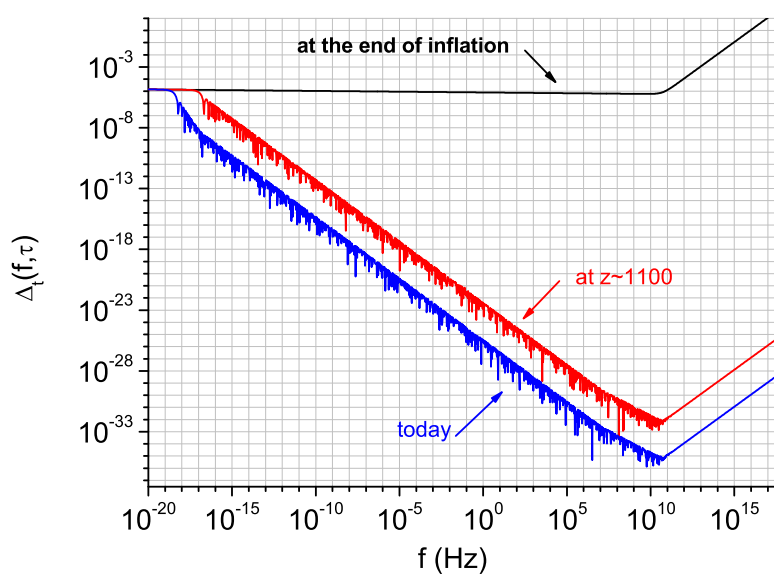


图 3.3 三个不同时刻下的残余引力波谱 $\Delta_t(f, \tau)$: 暴涨结束, 复合期 $z \sim 1100$, 以及今天。横轴是今天的物理频率 $f = k/2\pi a(\tau_H)$ 。图中, 我们取 $\beta = -2.0125$, $r = 0.12$ 来进行展示说明。

第四章 残余引力波的分解：真空与引力子

4.1 宇宙膨胀背景下的引力子产生

类比于暴涨时对残余引力波真空的定义 (3.10) 式，我们可以选当前加速膨胀阶段的真空

$$v_k(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{s}{2k}} e^{i\pi\gamma/2} H_{-\gamma-\frac{1}{2}}^{(2)}(s), \quad \tau_E < \tau \leq \tau_H, \quad (4.1)$$

使得在 $k \rightarrow \infty$ 时, $v_k(\tau) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik(\tau-\tau_a)}$ 。因此，我们可以用 $v_k(\tau)$ 来表示加速膨胀阶段的残余引力波解析解 (3.51)

$$u_k(\tau) = \alpha_k v_k(\tau) + \beta_k v_k^*(\tau), \quad (4.2)$$

其中 α_k 和 β_k 是 Bogolyubov 系数。由引力子的产生湮灭算符对易关系 (3.3)，我们得到它们满足

$$|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1. \quad (4.3)$$

所以，从暴涨时期仅有正频模 (3.10) 的真空涨落开始，残余引力波到今天已经演化为了正频模与负频模的混合态。从残余引力波场算符的傅里叶分解 (3.1) 可以看出，波矢空间中每个波数的算符正比于

$$a_{\mathbf{k}} u_k + a_{\mathbf{k}}^\dagger u_k^* = A_{\mathbf{k}} v_k + A_{\mathbf{k}}^\dagger v_k^*,$$

其中

$$A_{\mathbf{k}} \equiv \alpha_k a_{\mathbf{k}} + \beta_k^* a_{\mathbf{k}}^\dagger$$

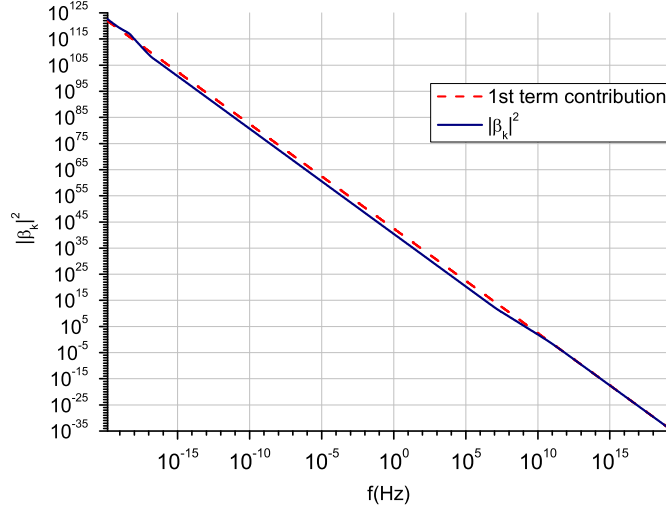
可看作是针对今天引力子真空态的产生湮灭算符。因此，今天加速膨胀阶段下引力子的数密度是

$$N_{\mathbf{k}} = \langle 0 | A_{\mathbf{k}}^\dagger A_{\mathbf{k}} | 0 \rangle = |\beta_k|^2. \quad (4.4)$$

此结果是膨胀宇宙中粒子产生理论的一个应用 [70]。图4.1展示了 $|\beta_k|^2$ 作为波数 k 的函数，在整个 $f \geq 10^{-18} \text{Hz}$ 频段，我们都近似有 $|\beta_k|^2 \propto k^{-4}$ ，如 (3.55) 式所示。

而且当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\alpha_k \sim 1$, $\beta_k \propto k^{-2}$ ，所以 (4.2) 式的 u_k 在高频极限下是由正频模 v_k 主导的。这证实了所谓的绝热定理 [42, 70, 71]，即高频模不被时空的缓慢变化所影响。我们详细的计算展示，自暴涨开始一直到现在, $f > 10^{11} \text{Hz}$ 的扰动模从来没有出过视界。

(3.55) 式中的 β_k 包含如 $\frac{\beta(\beta+1)}{4x_1^2} \propto a''/a$ 一样的项。通过弗里德曼方程我们有 $a''/a = \frac{4\pi G}{3} a^2 T^\mu{}_\mu$ ，所以我们可以把上面的项用驱动宇宙膨胀的背景能动张量的


 图 4.1 膨胀宇宙中产生的引力子数密度 $|\beta_k|^2$ 。

迹 $T^\mu{}_\mu$ 表达出来

$$\begin{aligned}
 \beta_k = & \frac{a(\tau_1)^2 \pi G}{3k^2} [T^\mu{}_\mu(\tau_1^-) - T^\mu{}_\mu(\tau_1^+)] e^{i(x_1+t_1-t_s+y_s-y_2+z_2-z_E+s_E)-i\pi\beta} \\
 & + \frac{a(\tau_s)^2 \pi G}{3k^2} [T^\mu{}_\mu(\tau_s^-) - T^\mu{}_\mu(\tau_s^+)] e^{i(x_1-t_1+t_s+y_s-y_2+z_2-z_E+s_E)+i\pi\beta} \\
 & + \frac{a(\tau_2)^2 \pi G}{3k^2} [T^\mu{}_\mu(\tau_2^-) - T^\mu{}_\mu(\tau_2^+)] e^{i(x_1-t_1+t_s-y_s+y_2+z_2-z_E+s_E)+i\pi\beta} \\
 & + \frac{a(\tau_E)^2 \pi G}{3k^2} [T^\mu{}_\mu(\tau_E^-) - T^\mu{}_\mu(\tau_E^+)] e^{i(x_1-t_1+t_s-y_s+y_2-z_2+z_E+s_E)+i\pi\beta} \\
 & + \mathcal{O}(k^{-3})
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中 $T^\mu{}_\mu(\tau_1^-)$ 是暴涨结束时的能动张量， $T^\mu{}_\mu(\tau_1^+)$ 是再加热开始时的能动张量，以此类推。(4.5) 式表明，引力子产生是由于在衔接点处背景能动张量迹的不连续导致的。在我们的模型中，压强 p 在衔接点处并不连续。更进一步，在 (4.5) 式的所有四项中，第一项表示暴涨和再加热阶段之间的衔接 $\propto 1/(k\tau_1)^2$ ，所以给出了最大的贡献，其他三项给出相应的一些修正。这在解析上证实了早期宇宙中粒子产生是最明显的 [72]。

有趣的是，我们将上述结果和众所周知的宇宙学背景下的粒子产生问题做比较。对于一个无质量的共形耦合标量场，在膨胀宇宙中是没有相应的标量粒子产生的 [46, 70, 71]。这一结论在规则化之前成立，即经典上来说能动张量的迹是消失的 $T^\mu{}_\mu = 0$ ，而在规则化之后会出现迹反常 $\langle 0|T^\mu{}_\mu|0\rangle_{phys} \neq 0$ [46, 47, 73]。对于非共形耦合的情况，一般来说 $T^\mu{}_\mu \neq 0$ 而且在膨胀宇宙中有相应的标量粒子产生。然而，我们的表达式 (4.5) 中， $T^\mu{}_\mu$ 是驱动宇宙膨胀的背景物质组分，而不是文献 [46, 47, 73] 中的标量场。

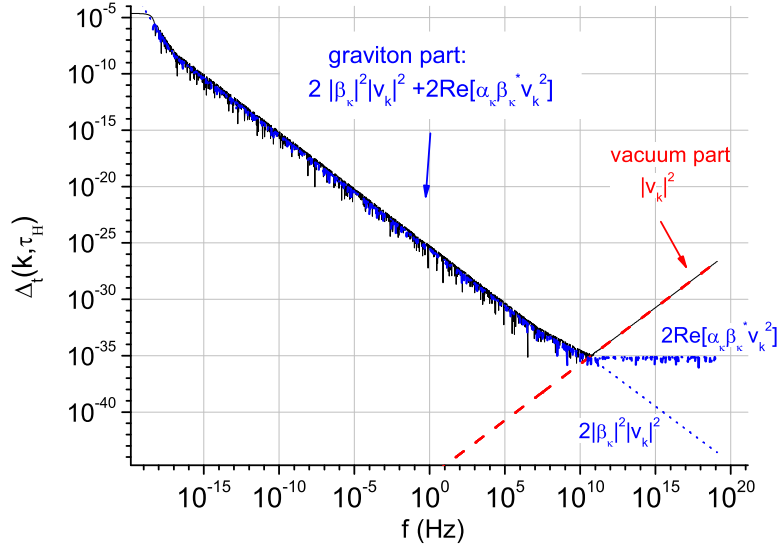


图 4.2 今天的残余引力波谱可以分解成引力子和真空两部分的贡献。在 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 处，真空部分占主导，导致谱的二次发散和对数发散 $\Delta_t^2(k) \propto k^2, k^0$ ，而引力子部分仅给出对数发散 $\Delta_t^2(k) \propto k^0$ 。

4.2 引力波谱的分解

现在我们利用真空和引力子的分解来分析今天的残余引力波功率谱

$$\Delta_t^2(k, \tau_H) = A^2 \frac{k^3}{\pi^2 a^2(\tau_H)} |u_k(\tau_H)|^2. \quad (4.6)$$

利用 (4.2) 式以及 (4.3) 式中的关系，我们可以写出如下表达式

$$|u_k(\tau)|^2 = |v_k(\tau)|^2 + 2\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* v_k(\tau)^2] + 2|\beta_k|^2 |v_k(\tau)|^2, \quad (4.7)$$

其中 $|v_k|^2$ 是真空项 (4.1) 的贡献，而最后含有 β_k 的两项是由引力子的存在导致的。在高频极限下，真空项 $|v_k|^2 \propto k^{-1}, k^{-3}$ ，交叉项 $\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* v_k^2] \propto k^{-3}$ ，纯引力子项 $|\beta_k|^2 |v_k|^2 \propto k^{-5}$ ，所以谱包含如下来自于真空项和交叉项的二次发散和对数发散行为

$$\Delta_t^2(k, \tau_H) \propto k^2, k^0, \text{ for } f > 10^{11}\text{Hz}, \quad (4.8)$$

我们将在下面的章节中对其进行扣除。在范围 $f < 10^{11}\text{Hz}$ 处， $\Delta_t^2(k, \tau_H)$ 是由引力子项主导的 $\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* (v_k)^2] + |\beta_k|^2 |v_k|^2$ ，二者具有相同的形状，但 $|\beta_k|^2 |v_k|^2$ 是光滑的， $\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* (v_k)^2]$ 会导致额外的振荡行为。图4.2中展示了这些项行为。

残余引力波的能动张量也可以被分解场引力子部分和真空部分。只要波长比宇宙的视界小，即 $f \geq 10^{-18}\text{Hz}$ ，残余引力波的（赝）能动张量可以被定义为 [74–76]

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{32\pi G} \langle 0 | h_{,\mu}^{ij} h_{ij,\nu} | 0 \rangle, \quad (4.9)$$

其中我们可以得到能量密度

$$\rho_{gw} = t^0_0 = \frac{1}{32\pi G a^2} \langle 0 | h'_{ij} h'^{ij} | 0 \rangle, \quad (4.10)$$

压强

$$p_{gw} = -\frac{1}{3}t^i{}_i. \quad (4.11)$$

将 (3.1)、(3.2) 和 (3.3) 代入到 (4.10) 中我们有

$$\rho_{gw} = \frac{1}{32\pi G a^2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} 2|h'_k(\tau)|^2 = \int_0^\infty \rho_k(\tau) \frac{dk}{k}, \quad (4.12)$$

而谱能量密度

$$\rho_k(\tau) = 2 \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} \left| \left(\frac{u_k}{a} \right)' \right|^2 \quad (4.13)$$

其中

$$\left| \left(\frac{u_k}{a} \right)' \right|^2 = \frac{|u'_k|^2}{a^2} + \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 |u_k|^2 - \frac{a'}{a^3} (u_k^* u'_k + u_k u_k'^*). \quad (4.14)$$

(4.13) 式对任意时间 τ 适用。注意，在高频 ρ_k 是由 (4.14) 式的第一项主导的，可以被近似为

$$\rho_k(\tau) \simeq \frac{k^3}{\pi^2 a^4} |u'_k|^2 \simeq \frac{k^5}{\pi^2 a^4} |u_k|^2 = \frac{1}{32\pi G a^2} k^2 \Delta_t^2(k, \tau), \quad (4.15)$$

这个表达式已经在文献中被广为使用 [3, 63, 77]。但是对于后面的规则化，我们应该使用完整的表达式 (4.14)。类似于 (4.7) 式，我们有如下的真空和引力子分解

$$\left| \left(\frac{u_k}{a} \right)' \right|^2 = \left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2 + 2\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* \left(\frac{v_k}{a} \right)'^2] + 2|\beta_k|^2 \left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2. \quad (4.16)$$

在 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 的高频段，真空项 $\left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2 \propto k^1, k^{-1}, k^{-3}$ ，交叉项

$$\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* \left(\frac{v_k}{a} \right)'^2] \propto k^{-1}, k^{-3}, \quad (4.17)$$

纯引力子项

$$|\beta_k|^2 \left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2 \propto k^{-3}, \quad (4.18)$$

所以 ρ_k 包含了四次、二次和对数发散

$$\rho_k \propto k^4, k^2, k^0. \quad (4.19)$$

在低频段 $f < 10^{11}\text{Hz}$ ，引力子的贡献占主导 $\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* \left(\frac{v_k}{a} \right)'^2] + |\beta_k|^2 \left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2$ ，在 $(10^{-18} - 10^7)\text{Hz}$ 给出 $\rho_k \propto k^{2\beta+4}$ ，在 $(10^7 - 10^{11})\text{Hz}$ 给出 $\rho_k \propto k^{0.5+(\beta+2)}$ 。这些行为见图4.3所示。

类似地，我们可以讨论压强 [76]

$$p_{gw} = \frac{1}{96a^2\pi G} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} 2k^2 |h_k|^2 = \int_0^\infty p_k(\tau) \frac{dk}{k}, \quad (4.20)$$

其中压强谱

$$p_k(\tau) = \frac{k^5}{3\pi^2 a^4} |u_k(\tau)|^2. \quad (4.21)$$

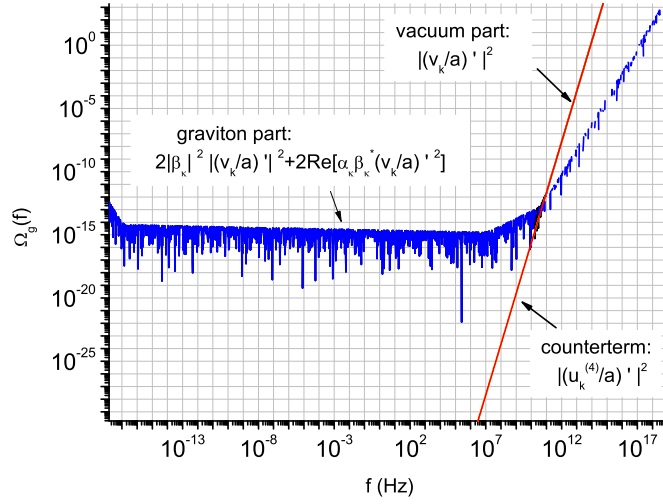


图 4.3 今天的残余引力波能量密度谱 $\Omega_g(f) = \rho_k(\tau_H)/\rho_c$ 由真空和引力子两部分组成，其中 ρ_c 是临界密度。

利用 (4.7)，我们有分解

$$p_k(\tau) = \frac{k^5}{3\pi^2 a^4} \left[|v_k|^2 + 2\text{Re}(\alpha_k \beta_k^* v_k^2) + 2|\beta_k|^2 |v_k|^2 \right]. \quad (4.22)$$

在 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 处，真空项 $|v_k|^2 \propto k^{-1}, k^{-3}, k^{-5}$ 主导，交叉项

$$\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* v_k^2] \propto k^{-3}, k^{-5}, \quad (4.23)$$

纯引力子项

$$|\beta_k|^2 |v_k|^2 \propto k^{-5}, \quad (4.24)$$

所以

$$p_k \propto k^4, k^2, k^0. \quad (4.25)$$

在 $f < 10^{11}\text{Hz}$ 处，引力子项占主导，详见图4.4。我们发现，在整个 $f > 10^{-18}\text{Hz}$ 频段，我们有

$$p_k(\tau) \simeq \frac{1}{3} \rho_k(\tau), \quad (4.26)$$

也就是说残余引力波能动张量的迹 $t^\mu{}_\mu(\tau) = 0$ 。因此，如图4.3 和图 4.4所示， ρ_k 和 p_k 有相同的形状。

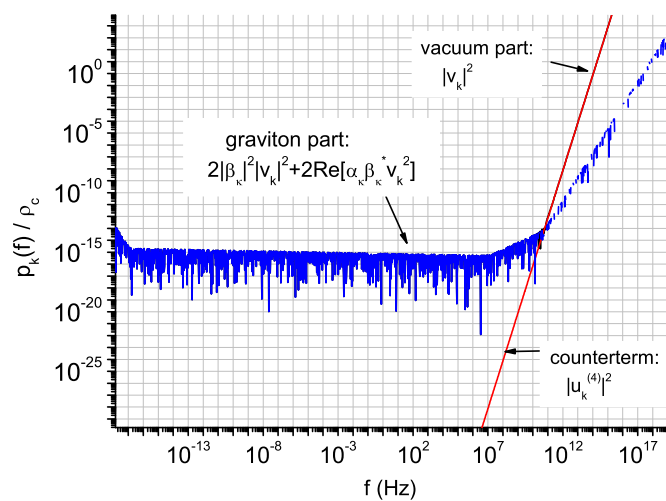


图 4.4 今天的残余引力波压强谱 $p_k(\tau_H)/\rho_c$ 有真空和引力子两部分贡献。

第五章 绝热规则化

5.1 弯曲时空量子场论中的真空发散与绝热规则化

在量子场论中，物理量的期望值通常会有发散行为，比如 (3.17) 式中的两点关联函数 $\langle 0|h^{ij}h_{ij}|0\rangle$ 已经 (4.9) 式中的能动张量 $t_{\mu\nu}$ 。在闵科夫斯基时空下，真空导致的紫外发散通常可以为场算符的正规排序所扣除掉。然而，在弯曲时空下，正规排序并不适用，我们需要引入新的规则化方法来消除紫外发散，比如绝热规则化 [42–47]。因为如前所述，残余引力波满足最小耦合无质量标量场的运动方程。所以标量场的规则化 [42, 45, 46] 也同样适用于残余引力波。从 (4.8) 式我们知道，残余引力波的功率谱有二次发散和对数发散。利用最小减除原理 [42, 46]，只有这两部分是应该被从谱中扣除的，所以对功率谱而言我们需要引入二阶绝热规则化。另一方面，从能量密度和压强的表达式 (4.19) 和 (4.25) 我们知道，这二者还包含有四次发散，所以依据最小减除原理的要求，对它们而言，我们应该使用四阶绝热规则化 [42, 46]。

本文强调，原初扰动的紫外发散不应该被简单的丢掉 [59]。对于经典的统计场，我们通常可以引入窗口函数来消除紫外发散。而因为残余引力波被当作量子场来处理，我们不能利用这些光滑化的手段来扣除紫外发散。

在弯曲时空量子场论中，模函数的 n 阶绝热真空态可以看作方程 (3.7) 的 WKB 近似解 [42, 45, 46]

$$u_k^{(n)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2W_k^{(n)}(\tau)}} \exp \left[-i \int_{\tau_0}^{\tau} W_k^{(n)}(\tau') d\tau' \right], \quad (5.1)$$

其中 $W_k^{(n)}(\tau)$ 依赖于绝热近似的阶数，由运动方程决定。对于无质量最小耦合标量场而言 [45]，0 阶绝热真空态有 $W_k^{(0)} = k$ ，而 2 阶绝热真空态有

$$W_k^{(2)} = \sqrt{k^2 - \frac{a''}{a}}, \quad (5.2)$$

一般的，对于 n 阶绝热真空态，我们有 [78]

$$W_k^{(n)} = \sqrt{k^2 - \frac{a''}{a} - \frac{1}{2} \left[\frac{W_k^{(n-2)''}}{W_k^{(n-2)}} - \frac{3}{2} \left(\frac{W_k^{(n-2)'}}{W_k^{(n-2)}} \right)^2 \right]}. \quad (5.3)$$

这些公式对于残余引力波也适用。而规则化后的谱就是原来的谱减去二阶绝热真空态所定义的绝热抵消项 [48]

$$\Delta_t^2(k, \tau)_{re} = A^2 \frac{k^3}{\pi^2 a^2} (|u_k(\tau)|^2 - |u_k^{(2)}(\tau)|^2), \quad (5.4)$$

其中二阶绝热抵消项为

$$|u_k^{(2)}|^2 = \frac{1}{2W_k^{(2)}} = \frac{1}{2k} \left(1 - \frac{a''}{ak^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \simeq \frac{1}{2k} + \frac{a''/a}{4k^3}. \quad (5.5)$$

原则上, 规则化的公式 (5.4) 可以在任意时间适用。当我们选择了不同的 τ , (5.4) 式会给出不同的规则化方案。在下一章中我们将对几种方案进行详细讨论。

5.2 功率谱的绝热规则化

这里我们首先把暴涨时期作为规则化的第一个例子。在高频极限 $k \rightarrow \infty$ 下, (3.10) 式中的模函数 $u_k(\tau)$ 可以被展开为

$$\begin{aligned} u_k(\tau) = & \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - i \frac{\beta(\beta+1)}{2k\tau} - \frac{(\beta+2)(\beta+1)\beta(\beta-1)}{8k^2\tau^2} \right. \\ & + i \frac{(\beta+3)(\beta+2)(\beta+1)\beta(\beta-1)(\beta-2)}{48k^3\tau^3} \\ & + \frac{(\beta+4)(\beta+3)(\beta+2)(\beta+1)\beta(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}{384k^4\tau^4} \Big) \\ & + \mathcal{O}(k^{-\frac{11}{2}}), \end{aligned} \quad (5.6)$$

所以

$$|u_k(\tau)|^2 = \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{\beta(\beta+1)}{2k^2\tau^2} + \frac{3(\beta+2)(\beta+1)\beta(\beta-1)}{8k^4\tau^4} \right) + \mathcal{O}(k^{-7}). \quad (5.7)$$

其中第一项 $1/2k$ 会导致二次发散, 对应闵科夫斯基时空中通常的真空涨落。第二项是对数发散, 是由膨胀背景下额外的真空涨落导致的, 我们可以将其写成

$$\frac{\beta(\beta+1)}{4k^2\tau^2} = \frac{R}{24(k/a)^2}, \quad (5.8)$$

其中 $R = 6a''/a^3$ 是标量里奇曲率。这个形式与 R 求和规则化与正规坐标动量空间规则化的已知结果相一致 [46, 79–81]。这两个发散项可以为二阶绝热抵销项 (5.5) 完全扣除掉 $|u_k^{(2)}|^2 = \frac{1}{2k} + \frac{(\beta+1)\beta}{4k^3\tau^2}$, 给出

$$|u_k|^2 - |u_k^{(2)}|^2 = \frac{3(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{16k^5\tau^4} + \mathcal{O}(k^{-7}), \quad (5.9)$$

仅留下了 (5.7) 式中的第三项。因此, 在高频 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 段绝热规则化后的谱就变成了

$$\Delta_t^2(k, \tau)_{re} = A^2 \frac{3(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{16\pi^2 a^2 k^2 \tau^4} \propto k^{-2}. \quad (5.10)$$

其结果如图6.5的顶部所示。对于低频 $f < 10^{11}\text{Hz}$, 谱几乎没有收到规则化的影响。当 (5.10) 式代入到两点关联函数 (3.17) 中去时, 我们得到一个有限的贡献, 即紫外发散不复存在了。

在特殊的严格德西特暴涨的情况下 $\beta = -2$, 模函数的解析表达式 (3.10) 变为

$$u_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right), \quad (5.11)$$

而且有 $|u_k(\tau)|^2 = 1/2k + 1/2k^3\tau^2$, 正等于此时的绝热抵消项 $|u_k^{(2)}(\tau)|^2$, 所以规则化后的谱为 0, $\Delta_T^2(k)_{re} = 0$ 。德西特时空下无质量标量场规则化的这一特征已经被 Parker 注意到 [48]。

接下来的一个例子是针对今天的加速膨胀阶段。在这个阶段, 残余引力波既有真空的贡献也有引力子的贡献。这里我们先仅对加速阶段的引力子部分进行讨论, 其模函数由 (4.1) 式给出。这个计算类似于暴涨阶段, 我们仅需要把 (5.10) 式中 $(1 + \beta)$ 替换成 $-\gamma$, τ 替换成 $(\tau - \tau_a)$ 即可, 最后得到在高频端 $k \rightarrow \infty$ 时规则化后的真空谱

$$\Delta_{vac}^2(k, \tau)_{re} = A^2 \frac{3(\gamma + 1)\gamma(\gamma - 1)(\gamma - 2)}{16\pi^2 a^2 k^2 (\tau - \tau_a)^4} \propto k^{-2}. \quad (5.12)$$

下一章中我们将讨论处理此阶段由引力子导致的发散。

5.3 能动张量的绝热规则化

如 (4.19) (4.25) 式所示, 残余引力波的真空能量密度和压强中含有四次发散、二次发散和对数发散 [42]。对于谱能量密度而言, 我们通常取

$$\rho_k(\tau)_{re} = 2 \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} \left(\left| \left(\frac{u_k(\tau)}{a} \right)' \right|^2 - \left| \left(\frac{u_k^{(4)}(\tau)}{a} \right)' \right|^2 \right), \quad (5.13)$$

其中四阶绝热抵消项是

$$\left| \left(\frac{u_k^{(4)}(\tau)}{a} \right)' \right|^2 = \frac{|u_k^{(4)}|^2}{a^2} + \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 |u_k^{(4)}|^2 - \frac{a'}{a^3} (u_k^{(4)*} u_k^{(4)'} + u_k^{(4)} u_k^{(4)*'}), \quad (5.14)$$

四阶绝热真空态为

$$u_k^{(4)}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2W_k^{(4)}(\tau)}} \exp \left[-i \int_{\tau_0}^{\tau} W_k^{(4)}(\tau') d\tau' \right]. \quad (5.15)$$

利用公式 (5.3), 我们可以算得 [42, 44, 85]

$$(W_k^{(4)})^2 = k^2 - \frac{a''}{a} - \frac{1}{4k^2 a^2} (a''^2 - aa'''' + 2a'a''' - 2\frac{a'^2 a''}{a}), \quad (5.16)$$

如此一来, 我们可以求得 (5.14) 式中的各项

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} |u_k^{(4)'}|^2 &= \frac{W_k^{(4)}}{2a^2} + \frac{(W_k^{(4)})^2}{8(W_k^{(4)})^3 a^2} \\ &\simeq \frac{k}{2a^2} - \frac{a''/a}{4a^2 k} - \frac{1}{16k^3 a^4} (2a''^2 - aa'''' + 2a'a''' - 2\frac{a'^2 a''}{a}) \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 |u_k^{(4)}|^2 = \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 \frac{1}{2W_k^{(4)}} \simeq \left(\frac{a'}{a^2} \right)^2 \left(\frac{1}{2k} + \frac{a''/a}{4k^3} \right), \quad (5.18)$$

$$-\frac{a'}{a^3}(u_k^{(4)*}u_k^{(4)'} + u_k^{(4)}u_k^{(4)*'}) \simeq \frac{1}{4k^3} \left(\frac{a'^2 a''}{a^5} - \frac{a''' a'}{a^4} \right), \quad (5.19)$$

所以最终的抵消项为

$$|(\frac{u_k^{(4)}(\tau)}{a})'|^2 = \frac{k}{2a^2} + \frac{1}{4a^2 k} \left(\frac{2a'^2}{a^2} - \frac{a''}{a} \right) + \frac{1}{8a^2 k^3} \left(\frac{5a'^2 a''}{a^3} - \frac{a''^2}{a^2} + \frac{a''''}{2a} - \frac{3a' a'''}{a^2} \right). \quad (5.20)$$

将这些代入到 (5.13) 式中，我们会得到规则化后的能量密度谱。

压强谱的处理也是类似

$$p_k(\tau)_{re} = \frac{k^5}{3\pi^2 a^4} \left(|u_k(\tau)|^2 - |u_k^{(4)}|^2 \right), \quad (5.21)$$

其中四阶绝热抵消项为

$$|u_k^{(4)}|^2 = \frac{1}{2W_k^{(4)}} \simeq \frac{1}{2k} + \frac{a''/a}{4k^3} + \frac{1}{16k^5 a^2} (4a''^2 - aa'''' + 2a' a''' - \frac{2a'^2 a''}{a}). \quad (5.22)$$

上面的规则化公式也对任意时间 τ 适用。首先，我们来考虑暴涨阶段，在这个阶段下，残余引力波的能量密度和压强仅有真空部分的贡献。利用 (3.10) 式中的模函数 u_k 表达式，我们有

$$\begin{aligned} |(\frac{u_k(\tau)}{a})'|^2 &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{k}{2} + \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{4k\tau^2} + \frac{3\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{16k^3\tau^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)(\beta+4)}{32k^5\tau^6} \right] + O(k^{-7}), \end{aligned}$$

而抵消项由 (5.20) 式给出

$$|(\frac{u_k^{(4)}(\tau)}{a})'|^2 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{k}{2} + \frac{(\beta+1)(\beta+2)}{4k\tau^2} + \frac{3\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{16k^3\tau^4} \right],$$

这一项恰好减除掉了 $|(u_k(\tau)/a)'|^2$ 中的四阶、二阶以及对数发散，给出了在高频极限下的规则化后谱能量密度

$$\rho_k(\tau)_{re} = \frac{5(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)(\beta+4)}{32\pi^2 a^4 k^2 \tau^6} + O(k^{-4}). \quad (5.23)$$

对于压强而言，相似的计算给出

$$\begin{aligned} |u_k(\tau)|^2 &= \frac{1}{2k} + \frac{\beta(\beta+1)}{4k^3\tau^2} + \frac{3(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{16k^5\tau^4} \\ &\quad + \frac{5(\beta-2)(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{32k^7\tau^6} + O(k^{-8}), \end{aligned}$$

以及抵消项

$$\left| u_k^{(4)}(\tau) \right|^2 = \frac{1}{2k} + \frac{\beta(\beta+1)}{4k^3\tau^2} + \frac{3(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{16k^5\tau^4}, \quad (5.24)$$

那么在高频极限下规则化后的压强谱就是

$$p_k(\tau)_{re} = \frac{5(\beta-2)(\beta-1)\beta(\beta+1)(\beta+2)(\beta+3)}{3 \times 32\pi^2 a^4 k^2 \tau^6} + O(k^{-4}). \quad (5.25)$$

表达式 (5.23) (5.25) 仅在高频展开时使用，即对应频率 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 。而在低频波段 $f < 10^{11}\text{Hz}$ 处， $\rho_k(\tau)_{re}$ 和 $p_k(\tau)_{re}$ 几乎不受规则化的影响。

从规则化后的 (5.23) (5.25) 两式可以看出，在高频段 ρ_{kre} ， $p_{kre} \propto k^{-2}$ ，而之前的关系式 (4.26) 被修改为

$$p_k(\tau)_{re} = \frac{1}{3} \frac{\beta-2}{\beta+4} \rho_k(\tau)_{re}, \quad (5.26)$$

也就是说，规则化后的残余引力波在高频段存在迹反常，

$$t^\mu{}_\mu(\tau)_{re} = \frac{6}{(\beta+4)} \rho_k(\tau)_{re} \neq 0. \quad (5.27)$$

这一反常的存在类似于规则化后共形耦合无质量标量场的情况 [46, 47, 73, 86]。注意对于 $\beta < -2$ ，(5.23) (5.25) 两式给出 $\rho_{kre} > 0$ 且 $p_{kre} < 0$ 。然而，相比于背景能标，真空涨落的幅度是很小的， $\rho_{kre}/\rho \sim (H/M_{Pl})^2 \sim 10^{-16}$ ，其中暴涨的能标 $\rho^{1/4} \sim 10^{15}\text{Gev}$ 。

接下来，我们将能量密度和压强的规则化应用到加速膨胀阶段。这里我们也先只考虑真空部分的贡献，即 (4.16) 和 (4.22) 式中由 $v_k(\tau)$ 给出的部分。在 (5.23) 和 (5.25) 式中做如下代换 $(\beta+1) \rightarrow -\gamma$ ，我们得到规则化后的能量密度和压强谱在高频端 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 的表达式

$$\rho_k(\tau)_{vre} = \frac{5(\gamma-3)(\gamma-2)(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}{32\pi^2 a^4 k^2 (\tau-\tau_a)^6} + O(k^{-4}), \quad (5.28)$$

$$p_k(\tau)_{vre} = \frac{5(\gamma-2)(\gamma-1)\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)}{3 \times 32\pi^2 a^4 k^2 (\tau-\tau_a)^6} + O(k^{-4}), \quad (5.29)$$

上文中我们已经给出对于 ΛCDM 宇宙学，最佳拟合的参数 $\gamma \simeq 2.1$ ，(5.28) 和 (5.29) 式表明 $\rho_{kre} < 0$ 以及 $p_{kre} > 0$ 。然而，我们将在下一章中证明，此处来自规则化后真空的贡献 (5.28) 和 (5.29) 两式其实是远远小于取截断的引力子的贡献，所以总的谱能量密度和压强在高频端还是正的。

第六章 几种可能的绝热规则化方案

如上文中的定义式 (3.18) 所示, 功率谱 $\Delta_t(k, \tau)$ 是依赖于时间的。那么我们应该在何时 τ 对谱做规则化呢? 在前人的文献中, 关于这部分内容一致存有争议 [50, 51, 54]。接下来, 我们将分别采用三种方案, 对谱进行规则化: 在观测时规则化, 在暴涨结束时规则化 [54], 以及每个模式出视界时规则化 [50, 51]。最终结果显示, 三种规则化方案给出的谱对于观测来说是相似的。

6.1 观测时规则化

这是本文考虑的第一种规则化方案。假设有一个观测者现在要去探测残余引力波, 那么很自然的想法就是在今天观测的时间 τ_H 去对谱进行规则化。这么做, 我们只需要把规则化谱的表达式 (5.4) 中的时间设定在 $\tau = \tau_H$ 处

$$\Delta_t^2(k, \tau_H)_{re} = A^2 \frac{k^3}{\pi^2 a(\tau_H)^2} (|u_k(\tau_H)|^2 - |u_k^{(2)}(\tau_H)|^2), \quad (6.1)$$

其中模函数 $u_k(\tau_H)$ 就是 (3.51) 式给出的加速膨胀阶段的表达式, 而抵消项 $|u_k^{(2)}(\tau_H)|^2$ 由 (5.5) 式给出。在今天时刻 τ_H 利用 (4.7) 式, 我们有

$$|u_k|^2 - |u_k^{(2)}|^2 = (|v_k|^2 - |u_k^{(2)}|^2) + 2\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* v_k^2] + 2|\beta_k|^2 |v_k|^2, \quad (6.2)$$

其中 $(|v_k|^2 - |u_k^{(2)}|^2) \propto k^{-5}$ 是规则化后的真空部分, 我们已经在上一章中求得 (5.9), 而引力子部分并未受到规则化的影响。图6.1给出了 $\beta = -2.0125$ 时规则化后的谱 $\Delta_t(k, \tau_H)_{re}$ 。图6.2则给出了 $\beta = -2$ 时规则化后的谱, 可见其并没有像暴涨时做规则化一样消失 [48]。

在规则化之后, 由于 (6.2) 式中引力子和真空交叉项 $2\text{Re}[\alpha_k \beta_k^* v_k^2]$ 导致的对数发散依然没有消除掉, 如图6.1和图6.2中所示的在 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 频段的平线。这一行为是由于宇宙膨胀过程中相邻两个阶段的 $a''(\tau)$ 不连续导致的, 可以作为一个更加光滑的连接解决掉 [9]。文献 [10] 指出, 产生的引力子是不能携带比暴涨能标更高的能量的, 也就是说其能量上限为 $\sim 10^{16}\text{GeV}$ 。这就给了我们一个引力子在 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 频段对数发散的上限。因此, 在绝热规则化和阶段之后, 谱变得收敛了, 在高频端 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 时 $\Delta_t^2(k, \tau_H)_{re} \propto k^{-2}$, 如图6.1和图6.2中的点线所示。

对于低频 $f < 10^{11}\text{Hz}$ 的部分, 谱主要是由引力子贡献的, 并没有受到规则化和截断的影响。尤其是, 定义在低频端 $f < 10^{-18}\text{Hz}$ 处的原初谱依然和 (3.25) 式的结果保持一致。相似于 (3.27) 式 (3.28) 式的结果, 我们可以定义规则化后的谱指数

$$n_{tre} \equiv \frac{d \ln \Delta_t^2(k)_{re}}{d \ln k} \Big|_{k \rightarrow 0} = 2\beta + 4 \quad (6.3)$$

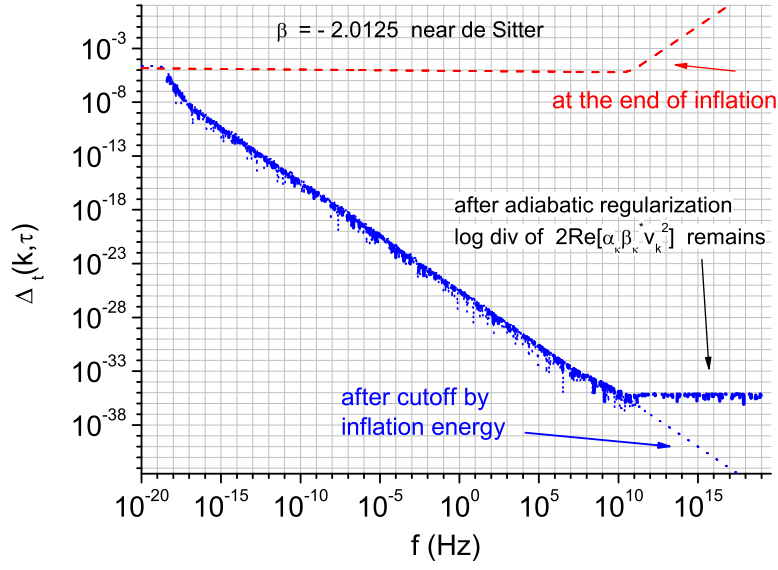


图 6.1 在今天观测的时刻 τ_H 做规则化。图的顶部是暴涨结束时未规则化的谱，而今天的谱是下方的曲线。

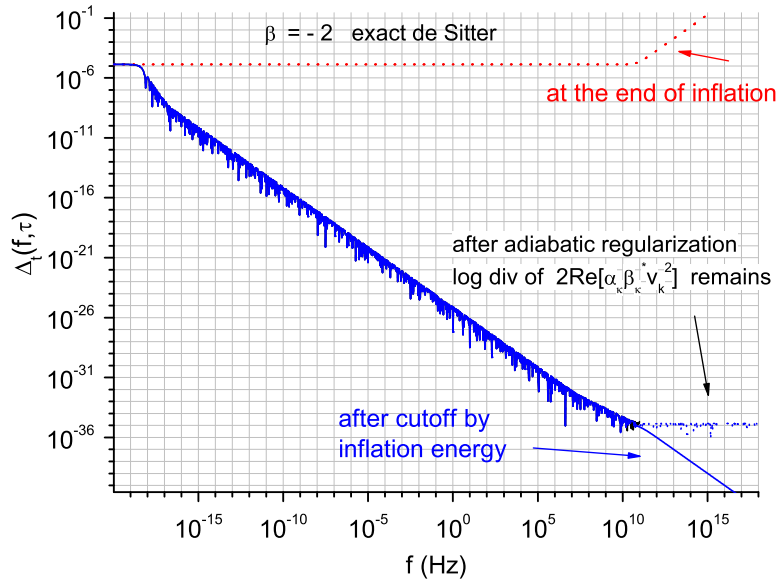


图 6.2 今天规则化的谱对于 $\beta = -2$ 的情况来说并没有消失。

$$\alpha_{tre} \equiv \frac{d^2 \ln \Delta_t^2(k)_{re}}{d(\ln k)^2} \Big|_{k \rightarrow 0} = 0, \quad (6.4)$$

它们分别具有和 (3.27) (3.28) 两式相同的值。

接下来我们来处理残余引力波今天的能量密度和压强。能量密度谱应该被绝热规则化到第四阶

$$\rho_k(\tau_H)_{re} = \frac{k^3}{\pi^2 a^2} \left(\left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2 - \left| \left(\frac{u_k^{(4)}}{a} \right)' \right|^2 + 2 \operatorname{Re}[\alpha_k \beta_k^* \left(\frac{v_k}{a} \right)'^2] + 2 |\beta_k|^2 \left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2 \right), \quad (6.5)$$

其中 $\left| \left(\frac{v_k}{a} \right)' \right|^2 - \left| \left(\frac{u_k^{(4)}}{a} \right)' \right|^2$ 是规则化后的真空部分，对于高频极限下我们已经得到 (5.28) 式的结果，而规则化后的压强谱就是

$$p_k(\tau_H)_{re} = \frac{k^5}{3\pi^2 a^4} \left((|v_k|^2 - |u_k^{(4)}|^2) + 2 \operatorname{Re}(\alpha_k \beta_k^* v_k^2) + 2 |\beta_k|^2 |v_k|^2 \right), \quad (6.6)$$

其中 $(|v_k|^2 - |u_k^{(4)}|^2)$ 的高频极限已由 (5.29) 式给出。由引力子导致的 ρ_k 和 p_k 发散已在 (4.17)、(4.18)、(4.23) 和 (4.24) 式中展示，它们不受规则化的影响，但类似于功率谱的处理，应该在 $f > 10^{11} \text{Hz}$ 处取截断。截断后， $f > 10^{11} \text{Hz}$ 引力子部分的领头阶应该满足如下关系

$$\begin{aligned} \rho_{kgr} = 3p_{kgr} &\simeq \frac{k^4}{\pi^2 a^4} \left[\frac{\beta(\beta+1)}{4x_1^2} \left(\frac{(\beta-1)(\beta+2)}{4x_1} + \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_s(\beta_s+1)}{4t_1^2} \left(\frac{\beta(\beta+1)}{4x_1} + \frac{(\beta_s-1)(\beta_s+2)}{4t_1} \right) \right]^2 \propto k^{-2}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

其中 $x_1 \equiv k|\tau_1|$ 且 $t_1 \equiv k|\tau_1 - \tau_p|$ 。通过比较，上式比今天的真空能量密度 (5.28) 要高好几个数量级因此，规则化和截断之后的总能量密度谱在 $f > 10^{11} \text{Hz}$ 处是正的。在整个 $(10^{-18} - 10^{11}) \text{Hz}$ 频段， ρ_{kre}, p_{kre} 是由引力子主导的，在规则化后几乎没有发生变换。规则化后的能量密度和压强谱如图 6.3 和图 6.4 所示。

6.2 暴涨结束时规则化

接下来，我们来研究规则化的第二种方案，也就是残余引力波的谱在暴涨结束的时刻 τ_1 做规则化 [54]。而且，我们将考虑使 τ_1 时刻规则化的模函数 $u_k^{re}(\tau)$ 依据运动方程演化至后续的宇宙膨胀阶段，直至达到今天的时刻 τ_H 。因为规则化后的谱对于严格的德西特暴涨来说消失了，我们考虑更一般的情况 $\beta \neq -2$ 。对于暴涨结束时规则化的谱，我们只需要在 (5.10) 式中取 $\tau = \tau_1$

$$|u_k^{re}(\tau_1)|^2 = |u_k(\tau_1)|^2 - |u_k^{(2)}(\tau_1)|^2. \quad (6.8)$$

这在 $\tau = \tau_1$ 时刻固定了规则化后的模函数 $u_k^{re}(\tau_1)$ 的幅度，可以作为后续演化的初条件。但我们还需要确定模函数的相位，此处我们假设 $u_k^{re}(\tau_1)$ 的相位和没有

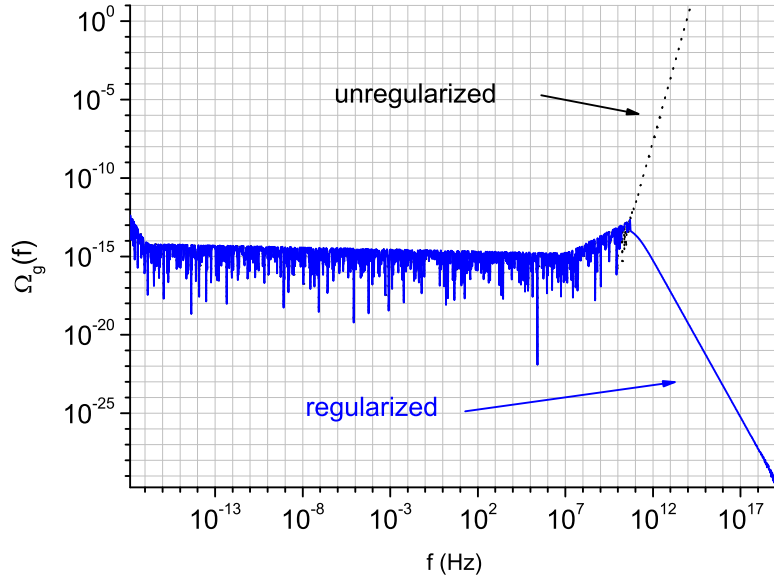


图 6.3 规则化后今天的能量密度谱 $\Omega_g(k)_{re} = \rho_k(\tau_H)_{re}/\rho_c$ 。

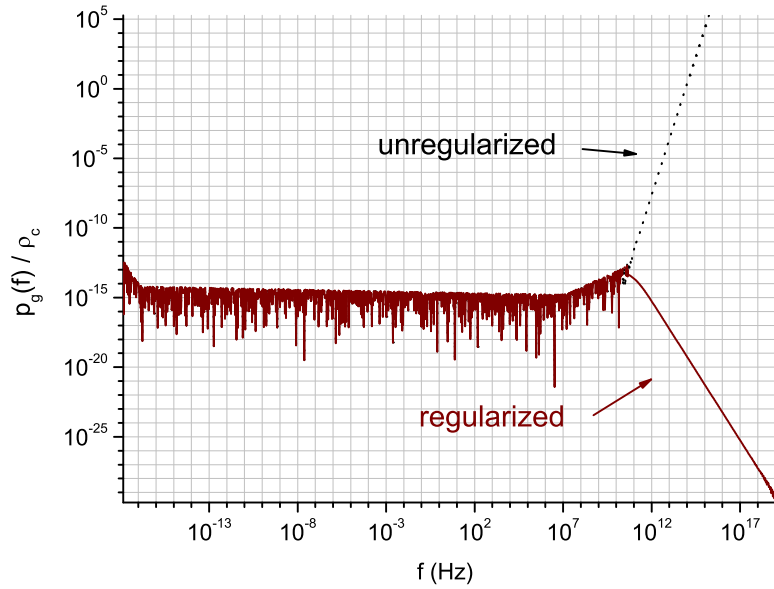


图 6.4 规则化后今天的压强谱 $p_k(\tau_H)_{re}/\rho_c$ 。

规则化的模函数 $u_k(\tau_1)$ 是一致的。对于后者我们有如下渐进行为

$$\begin{aligned} u_k(\tau_1) &\simeq \frac{e^{-ik\tau_1}}{\sqrt{2k}}, \quad \text{for } k \rightarrow \infty, \\ u_k(\tau_1) &\simeq \frac{\sqrt{-\pi\tau_1} e^{i(\beta-1)\pi/2}}{2\Gamma(\beta + \frac{3}{2}) \cos \beta\pi} \left(\frac{k\tau_1}{2} \right)^{\beta+\frac{1}{2}} + O(k^{\beta+\frac{3}{2}}) \quad \text{for } k \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

所以我们选取 τ_1 规则化后的模函数

$$u_k^{re}(\tau) = e^{i\theta} \sqrt{|u_k(\tau)|^2 - \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{\beta(\beta+1)}{2k^2\tau^2} \right)}, \quad \tau = \tau_1 \quad (6.10)$$

作为初条件，其中相位 θ 近似取为

$$\theta = \begin{cases} -k\tau & \text{for } k > -\tau_1^{-1} \\ (\beta-1)\pi/2 & \text{for } k < -\tau_1^{-1}, \end{cases} \quad (6.11)$$

那么时间导就由 $\tau = \tau_1$ 时刻的 $u_k^{re'}(\tau) = \frac{d}{d\tau} u_k^{re}(\tau)$ 给出。暴涨期间， τ_1 时刻之前的模函数 $u_k(\tau)$ 还是跟 (3.10) 式一样的。那么接下来 $u_k(\tau)$ 的演化如前所示，经历过再加热、辐射为主、物质为主以及加速膨胀四个阶段。尽管不同于谱，模函数的相位包含了量子态的信息 [2]，当前的探测器，比如 LIGO，是无法探测此相位信息的 [87]。因为本文主要还是关系谱的行为，上面的相位处理足以达到我们的目的。

图6.5中展示了暴涨结束后未规则化的谱、规则化的谱以及演化后今天的谱。注意今天规则化的谱在高频段 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 处有如下行为 $\Delta_t^2(k)_{re} \propto f^{-2}$ 。因此，谱的所有紫外发散，即真空和引力子导致的二次发散和对数发散，在这种方案下均被绝热规则化扣除了，所以我们不需要像上一节中一样引入额外的截断来处理。对比第一种方案，谱的幅度在 $f \sim 10^{11}\text{Hz}$ 左右大概相差 20 倍左右，而在 $f \sim 10^0\text{Hz}$ 处大概相差 1.2 倍，而在最低频端， $f \sim 10^{-18}\text{Hz}$ 处，原初谱以及谱指数 n_t 和 α_t 是几乎没有变化的，结果如 (3.25)、(3.27) 和 (3.28) 中一样。所以上述两种方案规则化后的谱区别不大。

6.3 原初扰动出视界时规则化

最后，我们来讨论文献 [50, 51] 提出的出视界时规则化的方案。这次我们同样考虑 $\beta \neq -2$ 的情况。低频的引力波在暴涨期间出视界，不同的模式 k 出视界的时间为 $|\tau_k| = 1/k$ ，那么对于每一个 k 模而言，规则化则是在 τ_k 时刻进行。所以在此方案中，规则化并不是瞬时的，而是在不同的时间 τ_k 。由暴涨期间的 (5.4) 式，我们直接得到

$$\Delta_t^2(k)_{re} = C(\beta) \frac{k^{2\beta+4}}{\pi^2 M_{Pl}^2 l_0^2} \quad \text{for } k < \frac{1}{|\tau_1|}, \quad (6.12)$$

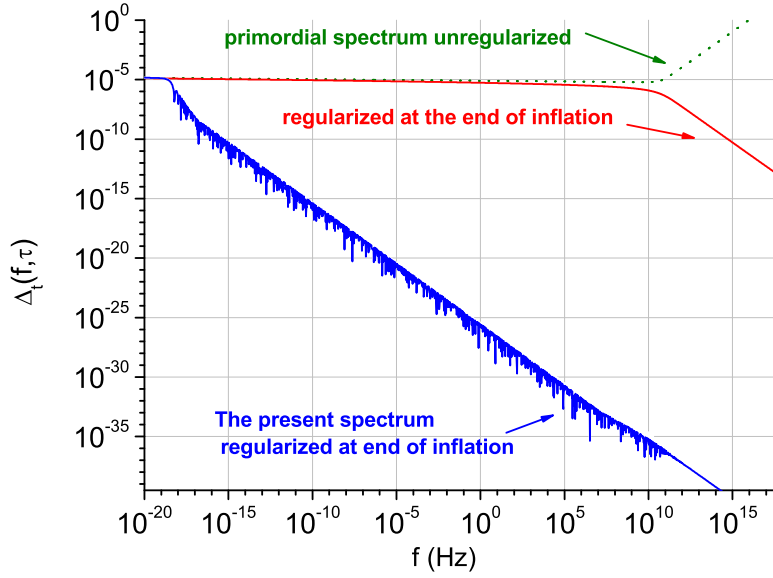


图 6.5 暴涨结束时规则化的谱，然后演化到今天。

其中 $C(\beta) \equiv \pi \left| H_{\frac{1}{2}+\beta}^{(2)}(1) \right|^2 - (2 + \beta(\beta + 1))$ 。上式可以进一步写成

$$\Delta_t^2(k)_{re} = C^2 \Delta_t^2(k) \quad \text{for } k < \frac{1}{|\tau_1|}, \quad (6.13)$$

其中 $\Delta_t^2(k)$ 是由 (3.25) 式定义的原初谱，而且系数

$$C^2 \equiv 2^{2\beta+1} \pi^{-1} \Gamma(\beta + \frac{3}{2})^2 \cos^2(\beta\pi) C(\beta) \simeq 0.904 \cdot |2 + \beta|. \quad (6.14)$$

是 β 的函数，对于 $\beta = -2.0125$ 我们有 $C^2 \simeq 0.01$ 。对于已经出视界模式，规则化后模函数的后续演化由下式给出

$$u_k^{re}(\tau) = C u_k(\tau) \quad \text{for } k < \frac{1}{|\tau_1|}. \quad (6.15)$$

另一方面，高频段的模式 ($k > 1/|\tau_1|$) 暴涨期间从来没有出过视界。而这些模式会导致谱的紫外发散。文献 [50, 51] 中没有讨论对这些扰动的处理。我们在暴涨结束的时刻 $\tau = \tau_1$ 时对这些模式进行规则化，

$$u_k^{re}(\tau) = e^{-ik\tau} \sqrt{|u_k(\tau)|^2 - \frac{1}{2k} \left(1 + \frac{\beta(\beta+1)}{2k^2\tau^2} \right)} \quad \text{for } k > 1/|\tau_1|, \quad (6.16)$$

而在 $\tau = \tau_1$ 时刻模函数对时间的偏导为 $u_k^{re'}(\tau) = \frac{d}{d\tau} u_k^{re}(\tau)$ 。因此，第三种方案下规则化后的原初谱为

$$\Delta_t^2(\tau_1, k)_{re} = \begin{cases} 2A^2 \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} |C u_k(\tau_1)|^2 & \text{for } k < 1/|\tau_1| \\ 2A^2 \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} \left[|u_k(\tau_1)|^2 - |u_k^{(2)}(\tau_1)|^2 \right] & \text{for } k > 1/|\tau_1| \end{cases}, \quad (6.17)$$

如图6.6中的上方曲线所示。给定了 (6.16) 式，高频模函数 $u_k(\tau)$ 接下来的演化也确定了。规则化后的今天的谱 $\Delta_t^2(k, \tau_H)_{re}$ 如图6.6的下方曲线所示。谱的形状

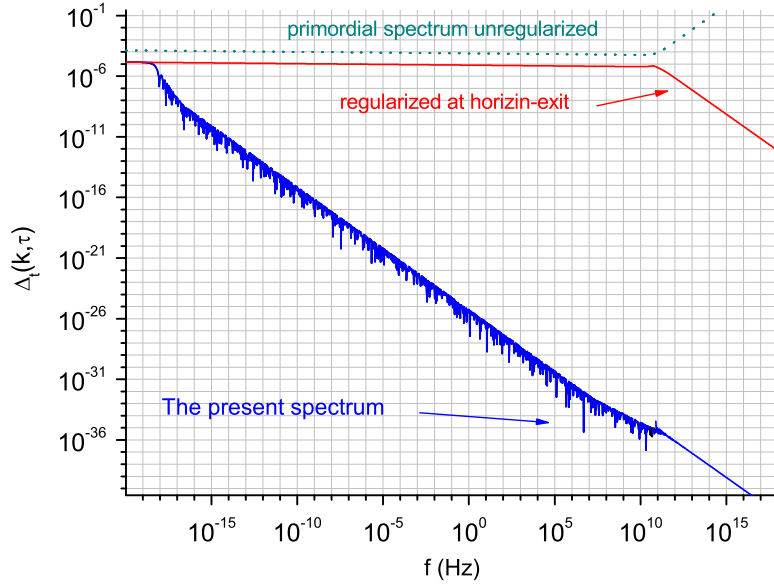


图 6.6 出视界时规则化的谱，以及演化到今天的谱。

和前两种规则化方案给出的结果基本一致，但是，谱的幅度由系数 C^2 压低了。在低频段，

$$\Delta_t^2(k, \tau_H)_{re} = C^2 \Delta_t^2(k) \quad \text{for } k < 1/|\tau_1| \quad (6.18)$$

其中 $\Delta_t^2(k)$ 是 (3.25) 式中定义的原初谱，而 $\Delta_t^2(k) \propto H^2 \propto \rho$ ，其中 ρ 是暴涨的能量密度。因为如 (3.34) 式所示，谱的幅度最后会被 CMB 观测所确定，我们可以通过将暴涨的能标提升 $1/C^2$ 倍来实现一个与前两种规则化方案结果一致的结果。

尽管本文给出的结果 (6.18) 式与慢滚近似的处理 [50] 相一致，但是此处 C^2 是独立于 k 的。因此，谱指数 n_t 和 α_t 并没有受到规则化的影响，依然保持 (3.27)(3.28) 两式中的结果。最后我们强调，在我们的处理中并未采用任何慢滚近似。

第七章 原初曲率扰动的规则化

不同于前文所述的残余引力波，即原初张量扰动，标量扰动是有源的，一般认为是来自于暴涨子的扰动，所以其产生依赖于具体的暴涨模型。所以在本章中我们首先介绍了一个具体的暴涨模型——幂律暴涨，这一类模型可以在暴涨期间给出标度因子的幂律演化行为。然后我们去考虑了原初曲率扰动的产生和规则化，并研究了规则化对可观测量的影响。

7.1 一个具体的模型：幂律暴涨

在单场暴涨图像中，标度因子的幂律演化行为 $a(\tau) = l_0 |\tau|^{1+\beta}$ 对应了一个具体的模型，即幂律暴涨 [8, 88]。这一模型拥有严格精确可解的动力学演化行为，而且我们也可以不做任何近似来解析求解其下的原初扰动功率谱 [8, 88]。

对于由单标量场驱动的暴涨阶段，弗里德曼方程有如下形式

$$\phi'' + 2\mathcal{H}\phi' + a^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0, \quad (7.1)$$

$$\mathcal{H}^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + a^2 V \right), \quad (7.2)$$

为了与前文表述一致，这里我们依然采用共形时。将 (7.2) 式对共形时求偏导，我们得到

$$2\mathcal{H}\mathcal{H}' = \frac{8\pi G}{3} \left(\phi' \phi'' + 2aa'V + a^2 \frac{\partial V}{\partial \phi} \phi' \right)$$

然后将两个弗里德曼方程 (7.1) 和 (7.2) 式代入到上述方程中，我们有

$$\mathcal{H}^2 - \mathcal{H}' = 4\pi G \phi'^2$$

这里我们引入标度因子的幂律演化关系式 $a(\tau) = l_0 |\tau|^{1+\beta}$ ，那么

$$4\pi G \phi'^2 = \frac{(1+\beta)(2+\beta)}{\tau^2}$$

因此我们可以求解暴涨子 ϕ 随共形时的演化关系

$$\frac{\phi}{M_{Pl}} = \sqrt{2(1+\beta)(2+\beta)} \ln(-\tau) + C$$

以及

$$V = 3M_{Pl}^2 \frac{\mathcal{H}'}{a^2} + \frac{\phi'^2}{a^2} = \frac{M_{Pl}^2 (2\beta+1)(\beta+1)}{a^2 \tau^2}$$

最后确定初条件，我们得到了幂律暴涨下标量场势的形状以及暴涨子的演化行为

$$V(\phi) = V_0 \exp \left(-\sqrt{\frac{2\beta+4}{\beta+1}} \frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \quad (7.3)$$

$$\frac{\phi(\tau)}{M_{Pl}} = \sqrt{\frac{2\beta+2}{\beta+2}} \ln \left[\sqrt{\frac{V_0}{(\beta+1)(2\beta+1)}} \frac{l_0(-\tau)^{2+\beta}}{M_{Pl}} \right] \quad (7.4)$$

在此模型下，慢滚参数定义为

$$\epsilon \equiv \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V} \right)^2 = \frac{\beta+2}{\beta+1} \quad (7.5)$$

$$\eta \equiv M_{Pl}^2 \frac{V''(\phi)}{V} = \frac{2\beta+4}{\beta+1}. \quad (7.6)$$

显然此处 $\eta = 2\epsilon$ 。

7.2 原初曲率扰动及其规则化

现在我们考虑暴涨时期的原初标量扰动。与残余引力波不同的是，标量扰动是有源的，通常情况下是由暴涨子场的扰动 $\delta\phi$ 产生。如第二章中所示，度规扰动的标量部分依赖坐标系选取，即在不同的规范下是不同的，而此处暴涨子场扰动 $\delta\phi$ 定义也依赖于坐标系的选取。实际上，我们可以对 $\delta\phi$ 和度规标量扰动进行组合，然后得到一个规范不变的标量场扰动 $\bar{\delta\phi}$ ，该扰动满足如下场方程 [91–93]

$$\bar{\delta\phi}'' + 2\mathcal{H}\bar{\delta\phi}' - \nabla^2\bar{\delta\phi} + \left[a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} - \frac{8\pi G}{a^2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{a^2 \phi'^2}{\mathcal{H}} \right) \right] \bar{\delta\phi} = 0, \quad (7.7)$$

上式与规范选取无关，在任何坐标系下成立。对于 $a(\tau) \propto |\tau|^{1+\beta}$ ，(7.7) 式中括号内的项消失了，所以方程简化为

$$w_k'' + (k^2 - \frac{a''}{a})w_k = 0, \quad (7.8)$$

其中我们定义模函数为 $\bar{\delta\phi}_k \equiv w_k/a$ 。显而易见，方程 (7.8) 与残余引力波模函数满足的运动方程 (3.7) 是完全一样的，而且如果我们进一步为模函数选取相同的初始条件（即 Bunch-Davies 真空），那么标量场扰动模函数 w_k 的解与残余引力波模函数 u_k 的解一样，已由 (3.10) 式给出。因此，我们可以得到标量场扰动 $\bar{\delta\phi}$ 的功率谱

$$\Delta_{\bar{\delta\phi}}^2(k, \tau) = \frac{k^3}{2\pi^2} |\bar{\delta\phi}_k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} |w_k|^2 = \frac{M_{Pl}^2}{8} \Delta_t^2(k, \tau), \quad (7.9)$$

其中 $\Delta_t^2(k, \tau)$ 是 (3.19) 式中给出的残余引力波功率谱。我们同样可以去求解谱指数和跑动谱指数

$$n_{\bar{\delta\phi}} - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_{\bar{\delta\phi}}^2(k)}{d \ln k} \Big|_{k \rightarrow 0} = 2\beta + 4,$$

$$\alpha_{\bar{\delta\phi}} \equiv \frac{d^2 \ln \Delta_{\bar{\delta\phi}}^2(k)}{d(\ln k)^2} \Big|_{k \rightarrow 0} = 0.$$

通常我们更关心的是标量度规扰动，因为它直接跟观测相联系。这里我们引入规范不变的标量曲率扰动定义 [94-97]

$$R \equiv \frac{\mathcal{H}}{\phi'} \delta\bar{\phi}.$$

那么标量曲率扰动的功率谱由下式给出

$$\Delta_R^2(k, \tau) = \frac{k^3}{2\pi^2} |R_k|^2 = \frac{k^3}{2\pi^2 a^2} \frac{\mathcal{H}^2}{\phi'^2} |w_k|^2 = \frac{1+\beta}{8(2\beta+4)} \Delta_t^2(k, \tau), \quad (7.10)$$

其中 $\frac{\mathcal{H}}{\phi'} = \frac{1}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{1+\beta}{2\beta+4}}$ 在我们的模型中是常数。曲率扰动 R 的原初扰动功率谱是产生 CMB 观测中温度各向异性的主要贡献，它也是定义与远在视界外

$$\Delta_R^2(k) \equiv \Delta_R^2(k, \tau)|_{k \ll 1/|\tau|} = \frac{1}{2\epsilon M_{Pl}^2} a_t^2 \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2 k^{2\beta+4}. \quad (7.11)$$

那么我们可以得到原初曲率扰动的谱指数

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln \Delta_R^2(k)}{d \ln k} \Big|_{k \rightarrow 0} = 2\beta + 4 = \frac{-6\epsilon}{1-\epsilon} + \frac{2\eta}{1-\eta/2} \quad (7.12)$$

可见它不同于慢滚近似的结果 $n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta$ [58]，而此处的跑动谱指数

$$\alpha_s \equiv \frac{d^2 \ln \Delta_R^2(k)}{d(\ln k)^2} \Big|_{k \rightarrow 0} = 0, \quad (7.13)$$

也不同于单场慢滚暴涨的结果 $\alpha_s = -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 + 2\xi^2$ ，其中 $\xi^2 \equiv M_{pl}^4 \frac{V'V'''}{V^2}$ 是由慢滚近似定义的另一个小参量 [60]。

联合上述原初标量曲率扰动和张量扰动功率谱的计算结果，我们可以定义张标比比二者幅度的比值

$$r \equiv \frac{\Delta_t^2(k)}{\Delta_R^2(k)} = 16 \frac{\beta+2}{\beta+1} = 16\epsilon, \quad (7.14)$$

由此我们有张标比与张量扰动谱指数之间满足的一致性关系

$$r = \frac{-8n_t}{1 - n_t/2}, \quad (7.15)$$

在慢滚参数远远小于 1 的情况下上式回到单场慢滚的标准结果 $r = -8n_t$ 。上面两式 (7.14) 和 (7.15) 都是对整个相关的 k 频段适用的。

下面我们来考虑标量扰动的绝热规则化问题，类似于残余引力波的情况 (5.4)，我们可以直接写下规则化后的标量曲率扰动谱

$$\Delta_R^2(k, \tau)_{re} = \frac{1+\beta}{2\beta+4} \frac{k^3}{2\pi^2 a^2 M_{Pl}^2} \left(|w_k|^2 - \frac{1}{2k} - \frac{a''/a}{4k^3} \right). \quad (7.16)$$

对于暴涨结束时做规则化的方案，这里的形况与上一章中对残余引力波的处理类似，原初标量谱、谱指数 n_s 、跑动谱指数 α_s 以及张标比 r 都没有受到绝热规

则化的影响。对于在出视界时做规则化的方案，我们同样可以类比残余引力波的处理，曲率扰动谱变为

$$\Delta_R^2(k)_{re} = C^2 \Delta_R^2(k) \text{ for } k \ll 1/|\tau_1|, \quad (7.17)$$

其中 C^2 是由 (6.14) 式给出的，因此规则化后的 n_s 、 α_s 、和 r 也没有变化。这些结果与文献 [50, 51] 中采用慢滚近似时的结果不同。

7.3 规则化对可观测量的影响

综上所述，后两种绝热规则化方案，暴涨结束时规则化以及出视界时规则化均没有对残余引力波和原初标量扰动产生探测的影响。特别是出视界时规则化，规则化后的标量谱和张量谱同时获得了一个常系数因子 C^2 ，因此张标比也跟之前没有规则化的结果完全一致。

$$r \equiv \frac{\Delta_t^2(k)_{re}}{\Delta_R^2(k)_{re}} = \frac{\Delta_t^2(k)}{\Delta_R^2(k)} = 16 \frac{\beta + 2}{\beta + 1}. \quad (7.18)$$

所以在规则化后，我们依然还有之前的一致性关系

$$r = \frac{-8n_t}{1 - n_t/2} \simeq -8n_t. \quad (7.19)$$

然而，接下来我们将展示，虽然上述可观测量均没有收到影响，但对于相同的张标比，在出视界时做规则化会导致一个更大的暴涨能标。

在没有涉及绝热规则化的标准处理中，暴涨的能标可以由弗里德曼方程 (7.2) 来确定。对于一个近德西特暴涨来说，我们有

$$H^2 \simeq \frac{V}{3M_{Pl}^2}. \quad (7.20)$$

而且由 (3.26) 式可知，哈勃参数 H^2 可以通过对残余引力波谱幅度的探测所确定

$$\Delta_t^2 = \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (7.21)$$

其中残余引力波谱的幅度通常是有张标比来表征的。因此，最终暴涨的能标可以表达为下面的关系式

$$V = \frac{3\pi^2 M_{Pl}^4}{2} r \Delta_R^2. \quad (7.22)$$

根据普朗克卫星的观测结果，我们有曲率扰动的幅度大概为 $\Delta_R^2 = 2.2 \times 10^{-9}$ 且张标比 $r < 0.12$ 。由此我们可以得到暴涨能标的上届 $V^{1/4} = 1.93 \times 10^{16} \text{GeV}$ 。

虽然对于出视界时规则化的谱，张标比并没有受到影响，但残余引力波谱与暴涨能标的关系却因为系数 C^2 的出现而变成了

$$\Delta_t^2(k)_{re} = C^2 \frac{8}{M_{Pl}^2} \left(\frac{H}{2\pi} \right)^2, \quad (7.23)$$

因此暴涨能标的表达式变为

$$V = \frac{3\pi^2 M_{Pl}^4}{2C^2} r \Delta_R^2. \quad (7.24)$$

对于 $\beta = -2.0125$, $C^2 \simeq 0.01$, 因此同样使用普朗克卫星的数据, 在出视界处规则化方案下我们可以得到一个更高的暴涨能标 $V^{1/4} = 1.69 \times 10^{18} \text{GeV}$ 。

第八章 总结与讨论

本文中我们对残余引力波三个方面的内容进行了研究：1、膨胀宇宙中的解析谱和谱指数；2、对今天残余引力波谱的分解（引力子和真空部分）；3、消除来自于真空和引力子的功率谱、能量密度和压强谱中的紫外发散。同时，我们在暴涨时期对规范不变的曲率扰动和暴涨子场扰动做了规则化。

对于解析的功率谱 $\Delta_t^2(k, \tau)$ ，谱指数 n_t ，跑动谱指数 α_t 和张标比 r ，我们得到了在任何时间和频段都适用的表达式。他们之间严格的表达式关系 (3.31) (7.12) (7.15) 与慢滚近似的结果不同，而且可以被未来的 CMB 观测所检验。尤其是，利用 CMB 观测在 $l \simeq (10 - 3000)$ 范围内得到的 C_l^{XX} 谱，我们实际上是可以限制在 $k|\tau_1| \sim (10^{-28} - 10^{-26})$ 范围内的原初谱 $\Delta_t^2(k, \tau)$ ，而这部分谱在暴涨时是远在视界之外的。所以原初谱 (3.25) 应该在视界外定义，而在出视界处定义的结果会出现非常大的偏差。

作为弯曲时空中的量子场，今天的残余引力波其实由真空和引力子两部分组成。这一分解理清了在相应频段上谱的组成。其中，今天的真空部分贡献会在功率谱 $\Delta_t^2(k, \tau_H)$ 的高频段 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 给出二次发散和对数发散；而在低频端 $f < 10^{11}\text{Hz}$ 是引力子主导的，今天的引力波探测器均在此频段工作。从这个层面上来说，今天的探测器要探测的是引力子，而不是残余引力波的真空部分。而引力子的数密度 $|\beta_k|^2$ 由宇宙演化历史中相邻阶段过渡点处的 $a''(\tau)$ 不连续所贡献，其中暴涨到重加热的相变贡献最大。

在消除紫外发散时，我们利用三种方案进行了规则化：分别是在今天规则化，在暴涨结束时规则化以及在出视界时规则化。第一种方案实际上包含了两部分处理。绝热规则化仅仅消除掉了今天真空导致的发散，而引力子的发散是通过引入截断来扣除掉的。最后两种方案则是在暴涨时期就消除掉真空导致的发散，然后规则化后的谱被当作初条件演化成为今天收敛的谱。除此之外，对于谱来说，二阶绝热规则化足以消除掉紫外发散，因此依据最小减除原理，我们不必引入四阶绝热抵销项。在以上三种方案中，规则化后谱在今天是相似的，只有第三种方案会导致一个更低的幅度，而这一问题又可以通过增加暴涨的能标来解决。在高频端 $f > 10^{11}\text{Hz}$ ，三种规则化后的谱均有如下行为 $\Delta_t^2(k, \tau_H)_{re} \propto k^{-2}$ ，可以作为高频引力波探测器的目标。而在低频端 $f < 10^{11}\text{Hz}$ ，规则化后的谱基本保持不变。

我们也计算了残余引力波的能量密度谱和压强谱。它们的真空 ρ_k and p_k 包含四次、二次以及对数发散，所以四阶绝热规则化是有必要的，而且足以抵消掉所有的发散。对于 $\beta < -2$ 的暴涨阶段，规则化后的真空在高频端 $\rho_{k, re} > 0$ 而 $p_{kre} < 0$ ，与暴涨背景相一致。对于今天的加速膨胀阶段 $\gamma \simeq 2.1$ ，规则化后的真空 $\rho_{k, re} < 0$ and $p_{kre} > 0$ 。今天引力子的部分仅含有二次发散和对

数发散，这些发散被暴涨能标截断来消除了，在 $f > 10^{11}\text{Hz}$ 的高频端给出了 $\rho_{k\text{gr}} = 3p_{k\text{gr}} \propto k^{-2}$ 的结果，比之前真空的贡献要大好多个数量级。在低频端 $f < 10^{11}\text{Hz}$ ， ρ_k 和 p_k 并没有被规则化和阶段所改变。所以在规则化和截断之后，总的能量密度和压强谱主要由引力子贡献。

对于标量场驱动的幂律暴涨，规范不变的标量场扰动有和残余引力波相同的严格解，而标量曲率扰动也是一样。所以其规则化正如同残余引力波的情况，具体来说，标量谱指数 n_s 、 α_s 和张标比 r 也都在规则化时保持不变。

本文研究的一大优势是基于残余引力波在整个膨胀宇宙中的严格解析解（同时对于暴涨子场扰动和标量曲率扰动则是基于暴涨期间的解析解）。本文结果显示，Parker-Fulling 的绝热规则化和最小减除原理完美消除掉了功率谱，能量密度和压强谱中的真空紫外发散。

参考文献

- [1] B. P. Abbott *et al.* [LIGO Scientific and Virgo Collaborations], Phys. Rev. Lett. **116**, no. 6, 061102 (2016) doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102.
- [2] L. P. Grishchuk, Sov. Phys. JETP **40**, 409 (1975).
- [3] L. P. Grishchuk, Class. Quantum Grav. **14** 1445 (1997). Lect. Notes Phys. **562** 167, (2001); arXiv:gr-qc/0002035.
- [4] L. H. Ford and L. Parker, Phys. Rev. D **16**, 1601 (1977).
- [5] A. A. Starobinsky, JETP Lett. **30**, 682(1979).
- [6] V. A. Rubakov, M. V. Sazhin and A. V. Veryaskin, Phys. Lett. B **115**, 189 (1982).
- [7] R. Fabbri and M.D. Pollock, Phys. Lett. B **125**, 445 (1983).
- [8] L.F. Abbott and M.B. Wise, Nucl. Phys. B **224**, 541 (1984).
- [9] L. H. Ford, Phys. Rev. D **35**, 2955 (1987).
- [10] B. Allen, Phys. Rev. D **37**, 2078 (1988). B. Allen and S. Koranda, Phys. Rev. D **50** 3713 (1994).
- [11] M. Giovannini, Phys. Rev. D **60**, 123511 (1999); PMC Phys. **A4**, 1 (2010).
- [12] V. Sahni, Phys. Rev. D **42** 453 (1990).
- [13] H. Tashiro, T. Chiba and M. Sasaki, Class. Quantum Grav. **21** 1761 (2004).
- [14] L. E. Mendes, A. B. Henriques, R. G. Moorhouse, Phys.Rev. D **52**, 2083 (1995).
- [15] Y. Zhang, *et al.*, Class. Quantum Grav. **22**, 1383 (2005).
- [16] Y. Zhang, *et al.*, Class. Quantum Grav. **23**, 3783 (2006).
- [17] J. Morais, M. Bouhmadi-Lopez, A. B. Henriques, Phys. Rev. D **89**, 023513 (2014).
- [18] S. Weinberg, Phys. Rev. D **69**, 023503 (2004).
- [19] Y. Watanabe and E. Komatsu, Phys. Rev. D **73**, 123515 (2006).
- [20] H. X. Miao and Y. Zhang, Phys. Rev. D **75**, 104009 (2007).
- [21] M. Cheng, *et al.*, Phys. Rev. D **74**, 054507 (2006).
- [22] D. J. Schwarz, Mod. Phys. Lett. A **13**, 2771 (1998).
- [23] S. Wang, Y. Zhang, T. Y. Xia, and H. X. Miao, Phys. Rev. D **77**, 104016 (2008).
- [24] <http://www.ligo.caltech.edu>
- [25] F. Acernese *et al.*, Class. Quantum Grav. **22**, S869 (2005); <http://virgo.infn.it/>
- [26] B. Willke *et al.*, Class. Quantum Grav. **19**, 1377 (2002); <http://www.geo600.org/>
- [27] K. Kuroda, Class Quantum Grav. **27** 084004 (2010); K. Somiya, Class. Quantum Grav. **29**, 124007 (2012); Y.Aso, K.Somiya, O.Miyakawa, Class. Quantum Grav. **29**, 124008 (2012); <http://gwcenter.icrr.u-tokyo.ac.jp/en/>
- [28] <http://lisa.nasa.gov/>; <http://elisa-ngo.org/>; P. Amaro-Seoane *et al.*, Class. Quantum Grav. **29**, 124016 (2012).
- [29] W. Zhao, Y. Zhang, X.P. You, and Z.H. Zhu, Phys. Rev. D **87**, 124012 (2013).
- [30] M. L. Tong *et al.*, Class. Quantum Grav. **31**, 035001 (2014).
- [31] E. Komatsu, *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **192**, 18 (2011).
- [32] C. L. Bennett, *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **208**, 20 (2013).
- [33] Planck collaboration, Astron. Astrophys. **571**, A22 (2014).
- [34] BICEP2 collaboration, Phys. Rev. Lett. **112**, 241101 (2014) arXiv:1403.3985
- [35] BICEP2/Keck and Planck Collaborations, Phys. Rev. Lett. **114**, 101301 (2015).
- [36] F.Y. Li, M. X. Tang, D. P. Shi, Phys. Rev. D **67**, 104008 (2003).
- [37] M. L. Tong, Y. Zhang, and F. Y. Li, Phys.Rev. D **78**, 024041 (2008).
- [38] Planck collaboration, Astron. Astrophys., **571**, A1 (2014).
- [39] R. Keisler, *et al.*, ApJ, **743**, 28 (2011).
- [40] S. Das, *et al.*, ApJ **729**, 62 (2011).
- [41] R. B. Friedman, P. Ade, J. Bock, *et al.* ApJ **700**, L187 (2009).
- [42] L. Parker and S.A. Fulling, Phys. Rev. D **9**, 341 (1974).
- [43] S. A. Fulling, L. Parker and B. L. Hu, Phys. Rev. D **10**, 3905 (1974).
- [44] T. S. Bunch, J. Phys. A **13**, 1297 (1980).
- [45] P. R. Anderson and L. Parker, Phys. Rev. D **36**, 2963 (1987).
- [46] L. Parker and D. J. Toms, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2009).
- [47] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1982).
- [48] L. Parker, arXiv:hep-th/0702216.

-
- [49] I. Agullo, J. Navarro-Salas, G. J. Olmo, L. Parker, Phys. Rev. Lett. **101**, 171301 (2008);
 - [50] I. Agullo, J. Navarro-Salas, G. J. Olmo, L. Parker, Phys. Rev. Lett. **103**, 061301 (2009).
Gen. Relativ. Gravit. **41**, 2301 (2009);
 - [51] I. Agullo, J. Navarro-Salas, G. J. Olmo, L. Parker, Phys. Rev. D **81**, 043514 (2010) .
 - [52] I. Agullo, J. Navarro-Salas, G. J. Olmo, L. Parker, Phys. Rev. D **84**, 107304 (2011).
 - [53] F. Finelli, G. Marozzi, G. P. Vacca, G. Venturi Phys. Rev. D **76**, 103528 (2007).
 - [54] R. Durrer, G. Marozzi and M. Rinaldi, Phys. Rev. D **80**, 065024 (2009).
 - [55] G. Marozzi, M. Rinaldi and R. Durrer, Phys. Rev. D **83**, 105017 (2011).
 - [56] E. D. Stewart and D. H. Lyth, Phys. Lett. B. **302**, 171 (1993).
 - [57] A. R. Liddle and D. H. Lyth, Phys. Lett. B **291**, 391 (1992).
 - [58] A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
 - [59] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The Primordial Density Perturbation* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2009)
 - [60] A. Kosowsky and M. S. Turner, Phys. Rev. D **52**, R1739 (1995).
 - [61] B. A. Bassett, S. Tsujikawa, D. Wands, Rev. Mod. Phys. **78**, 537 (2006).
 - [62] M. Maggiore, Phys. Rep. **331**, 283 (2000).
 - [63] Y. Zhang, M. L. Tong, and Z.W. Fu, Phys. Rev. D **81**, 101501(R) (2010).
 - [64] W. Zhao and Y. Zhang, Phys. Rev. D **74**, 083006 (2006).
 - [65] T. Y. Xia and Y. Zhang, Phys. Rev. D **78**, 123005 (2008); Phys. Rev. D **79**, 083002 (2009); Y. Zhang, Int. J. Mod. Phys. D **20**, 2099(2011).
 - [66] Z. Cai and Y. Zhang, Class. Quant. Grav. **29**, 105009 (2012).
 - [67] C. L. Bennett *et al.*, ApJS **148**, 1 (2003).
 - [68] G. Hinshaw, et al., ApJS **208**, 19 (2013), arXiv:1212.5226.
 - [69] M. J. Mortonson and U. Seljak, JCAP **10** 035 (2014).
 - [70] L. Parker, Ph.D. thesis, Harvard University, (1965).
 - [71] L. Parker, Phys. Rev. **183**, 1057 (1969).
 - [72] L. Parker, Phys. Rev. Lett. **21**, 562 (1968).
 - [73] L. H. Ford, Phys. Rev. D **31** 710 (1985).
 - [74] R. A. Isaacson, Phys. Rev. **166**, 1263 (1968); Phys. Rev. **166**, 1272 (1968).
 - [75] D.R. Brill and J.B. Hartle, Phys. Rev. **135**, B271 (1964).
 - [76] D.Q. Su and Y. Zhang, Phys. Rev. D **85**, 104012 (2012).
 - [77] B. Allen and J.D. Romano, Phys. Rev. D **59**, 102001 (1999).
 - [78] J. D. Bates and P. R. Anderson, Phys. Rev. D **82**, 024018 (2010).
 - [79] B.S. De Witt, *Dynamic Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach, New York (1965).
 - [80] T.S. Bunch and L. Parker, Phys. Rev. D **20** 2499 (1979).
 - [81] L. Parker, *Aspects of quantum field theory in curved spacetime: Effective Action and Energy-momentum tensor*, in *Recent Developments in Gravitation, Cargese 1978*, ed. M. Levy and S. Deser (Plenum Press, New York), 218-273 (1979)
 - [82] F. Finelli, G. Marozzi, G. P. Vacca and G. Venturi, Phys. Rev. D **74**, 083522 (2006).
 - [83] L. H. Ford and L. Parker, Phys. Rev. D **16**, 245 (1977).
 - [84] M.M. Glenz and L. Parker, Phys. Rev. D **80**, 063534 (2009).
 - [85] B. Chakraborty, J. Math. Phys. **14**, 188 (1973).
 - [86] B.L. Hu, Phys. Rev. D **18**, 4460 (1978).
 - [87] B. Allen, E. E. Flanagan, M. A. Papa, Phys. Rev. D **61**, 024024 (1999).
 - [88] F. Lucchin and S. Matarrese, Phys. Rev. D **32**, 1316 (1985).
 - [89] D. H. Lyth and E. D. Stewart, Phys. Lett. B **274**, 168 (1992).
 - [90] E. D. Stewart and D. H. Lyth, Phys. Lett. B **302**, 171, (1993), arXiv:gr-qc/9302019.
 - [91] J. Hwang, Phys. Rev. D **48**, 3544 (1993).
 - [92] J. Hwang, arXiv:gr-qc/9608018.
 - [93] C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett and R. Maartens, Phys. Rev. D **63**, 023506 (2000).
 - [94] H. Kodama and M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78**, 1 (1984).
 - [95] M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **76**, 1036 (1986).
 - [96] V. F. Mukhanov, Sov. Phys. JETP **67**, 1297 (1988).
 - [97] V. F. Mukhanov, *Physical Foundations of Cosmology*, Cambridge University Press, (2005)

致 谢

论文写到这里，在科大的三年研究生生活也接近尾声了。对于大爆炸以来的 137 亿年而言，这三年也许完全可以忽略不计，因为就算宇宙目前在失控般地加速膨胀，在此期间也不过才放大了 10^{-10} 倍。然而，科大的三年对于我个人而言却有着至关重要的意义。翻看三年前的日记，那时的我怀着对物理的一腔热情来到科大，立志要从事宇宙学研究，但对科研的认识却还模糊而稚嫩，不知未来通向何处。时光荏苒，那一份坚定始终留在心中，而时至今日，我脚下的路也逐渐明晰了起来。在这里，我希望能对三年来帮助过我的所有师长和同学表达诚挚的谢意。

首先我要感谢我的导师张杨教授。本文是在张老师的悉心指导下完成的。作为科研上的启蒙导师，张老师通过言传身教带我走进了宇宙学研究的大门。在张老师耐心细致的指导下做科研，我认识到了扎实基础的重要性，也学到了一丝不苟的工作精神和严谨认真的学术态度。三年来，张老师对我的鼓励和批评都使我受益匪浅，前者让我奋进，后者则帮我认清了自己的问题，端正了科研的态度。而且我要感谢张老师对我这个不安分学生的理解和支持，正因为这份包容，我才能自由的去寻找未来发展的方向。张老师淡泊宁静的人生境界更是我未来一生追求的方向。

特别感谢蔡一夫老师在科研、生活、人生等各个方面对我的巨大帮助。遇到蔡老师也许是我在过去的一年里最为幸运的一件事，依然记得跟蔡老师初识时的长谈，让我重新领略到了前沿宇宙学研究的魅力所在。后来我有幸能跟蔡老师一起合作，他更是提供了最好的科研平台，让我有机会接触各种有趣的前沿课题，并进行广泛的合作交流。蔡老师对科研的无限激情、拼搏的人生态度、乐观积极的心态都让我为之心折。而在生活和未来发展等方面，蔡老师对我无微不至的关怀也屡屡让我感动。蔡老师不光是一位良师益友，更是我人生的榜样！

感谢科大天文系的袁业飞老师和赵文老师，他们在学习和科研上的帮助让我获益良多，特别是给袁业飞老师做助教的经历让我对教学有了新的认识。感谢近代物理系的高道能老师、卢建新老师和李明哲老师，是他们课上精彩的讲授帮我揭开了理论物理神秘的面纱，为后续的研究工作打下了基础。

感谢我的合作者，亚利桑那州立大学的 Francis Duplessis 博士和 Damien Easson 教授、亚洲太平洋地区理论物理中心（APCTP）的 Jinn-Ouk Gong 教授、中科院高能物理研究所的黄发朋师兄和万友平师兄。和他们一起工作，我得以领略不同的研究风格，视野也得到了很大的开拓。非常荣幸在我学术生涯的起步阶段能有各位的提携帮助，希望我们未来也可以继续合作下去。

感谢陈洁文师兄以及盛振峰、王博、叶成云、张星等同学三年来在学习生

活上的帮助。感谢王子威、王凯、刘峻宇、李毓斌和李崇焕等粒子宇宙学组可爱的师弟们，是你们的加入使得宇宙学研究充满了生机与活力。如果今后各位还选择做宇宙学，希望我们能一起做出更多更好的工作，去书写属于我们这一代的辉煌！

最后感谢我的家人，正因你们的大力支持，我才得以毫无后顾之忧的追求理想。特别是我的父母，感谢你们对我这个倔强儿子的理解和包容。从上高中算起，迄今已经离开家整整十年了，这期间一直都是聚少离多。每当想到自己常年在外漂泊，忙于学业而忽略了家人，内心都会感到羞愧不已。想到接下来就要远赴异国继续寻梦了，心中更是五味杂陈，惟愿能早日回报父母的养育之恩。

自从入坑以来，物理学和天文学领域先后发生了数次值得载入史册的事件，比如 Higgs 粒子的发现、原初 B 模式的探寻以及今年初引力波的发现。每每此刻，我都感到很荣幸能加入到这场“人类心智最伟大的冒险”当中，然而也会对自己半吊子的学术功底感到捉急。对前沿领域了解的越多，也越发感觉到自己水平还差得太远，也许只有接下来不断的努力才能弥补理想和现实的差距，回馈各位师长的无私奉献和殷切期望。

遂古之初，谁传道之？对极早期宇宙的求索之路才刚刚开始……

王东刚

2016 年 5 月 6 日

在读期间发表的学术论文与取得的研究成果

研究工作：

1. 宇宙密度场扰动与两点关联函数的非线性演化
2. 残余引力波的引力子与真空，以及功率谱和能动张量的绝热规则化
3. 由原初声速引起的 CMB 半球不对称：对 δN 公式的推广
4. 在低红移观测中寻找物质反弹宇宙学的证据
5. 探寻弱电相变的本质：从粒子对撞机到引力波探测器
6. 非吸引子暴涨初条件与原初功率谱和非高斯中的特征

已发表论文：

1. Dong-Gang Wang, Yi-Fu Cai, Wen Zhao and Yang Zhang, Scale-dependent CMB power asymmetry from primordial speed of sound and a generalized δN formalism, JCAP 02 (2016) 019, arXiv:1509.02541.
2. Yi-Fu Cai, Francis Duplessis, Damien Easson, and Dong-Gang Wang, Searching for a matter bounce cosmology with low redshift observations, Phys. Rev. D 93, 043546 (2016), arXiv:1512.08979.

待发表论文：

1. Dong-Gang Wang, Yang Zhang and Jiewen Chen, Vacuum and Gravitons of Relic Gravitational Waves, and Regularization of Spectrum and Energy-Momentum Tensor, Submitted to Phys. Rev. D, arXiv:1512.03134.
2. Fa Peng Huang, Youping Wan, Dong-Gang Wang, Yi-Fu Cai and Xinmin Zhang, Probing the nature of electroweak phase transition from particle colliders to gravitational wave detectors, Submitted to Physical Review Letters, arXiv:1601.01640.