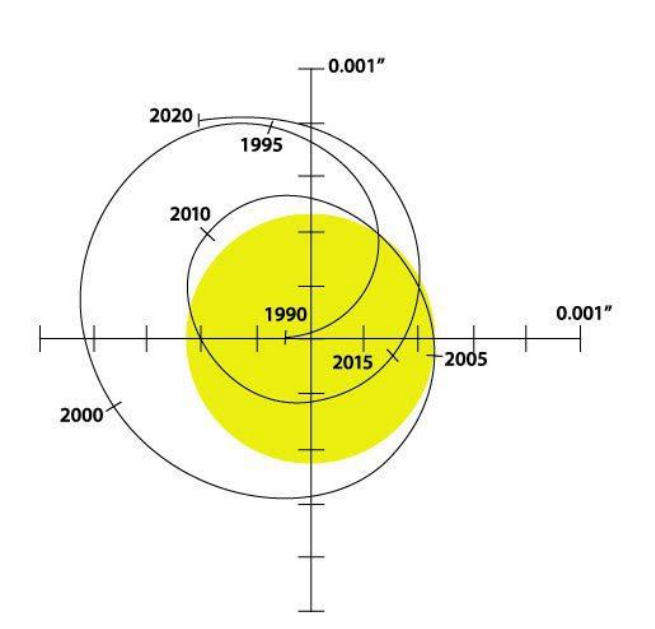
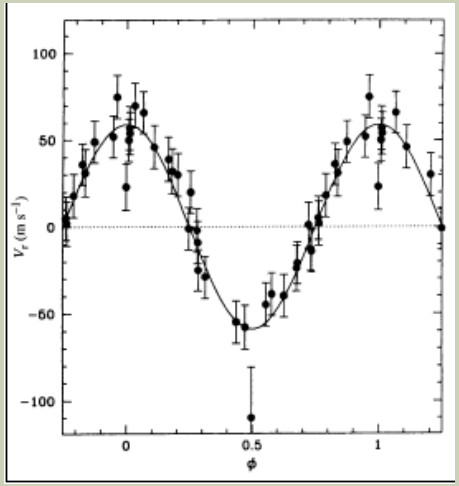
EXOPLANETEN

Vijf standard detectie methodes (met voor- en nadelen)

1) Astrometrie

Kijk naar een (regelmatige) schommeling van de positie van een ster rond het massa middelpunt van een ster plus planeet.



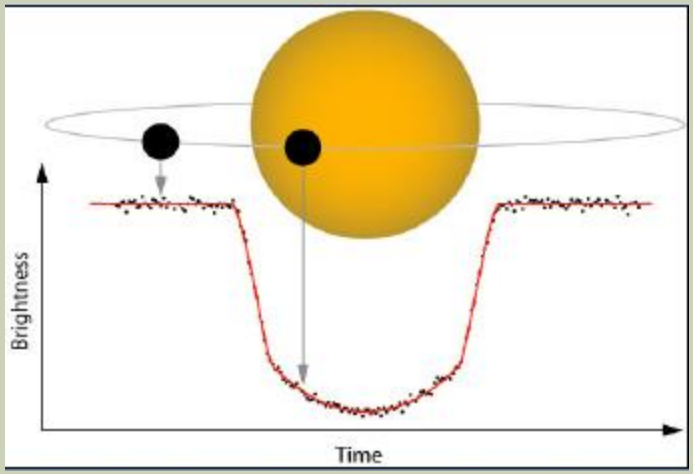


2) Doppler variatie

Kijk naar de schommeling van spectrale sterlijnen, omdat de radiele snelheid van de ster a.g.v. de zwaarte-kracht van een begeleidende planeet verandert.

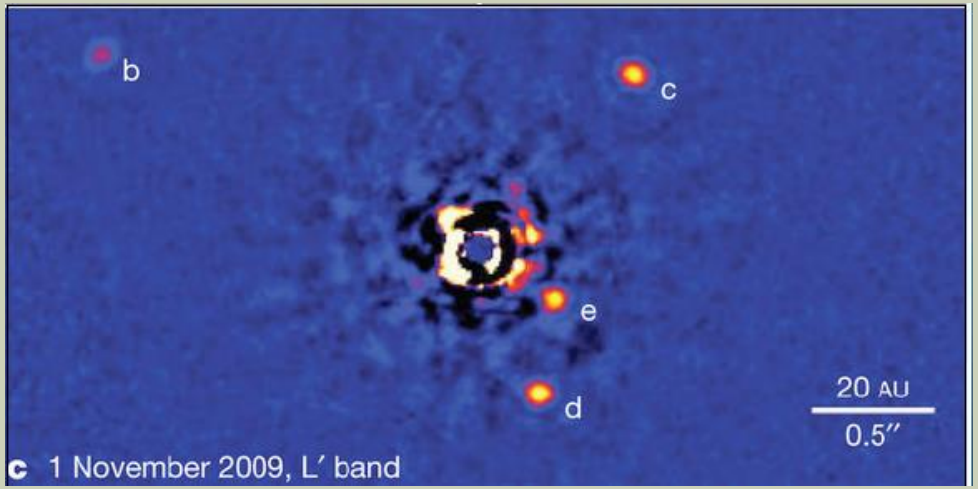
EXOPLANETEN

Vier standard detectie methodes



3) Transit methode (Hot Jupiters)

Kijk naar de lichtcurve van een ster; bij geringe inclinatie is er een primair minimum te zien op het moment dat een planeet 'voorlangs' beweegt.



4) Direct imaging

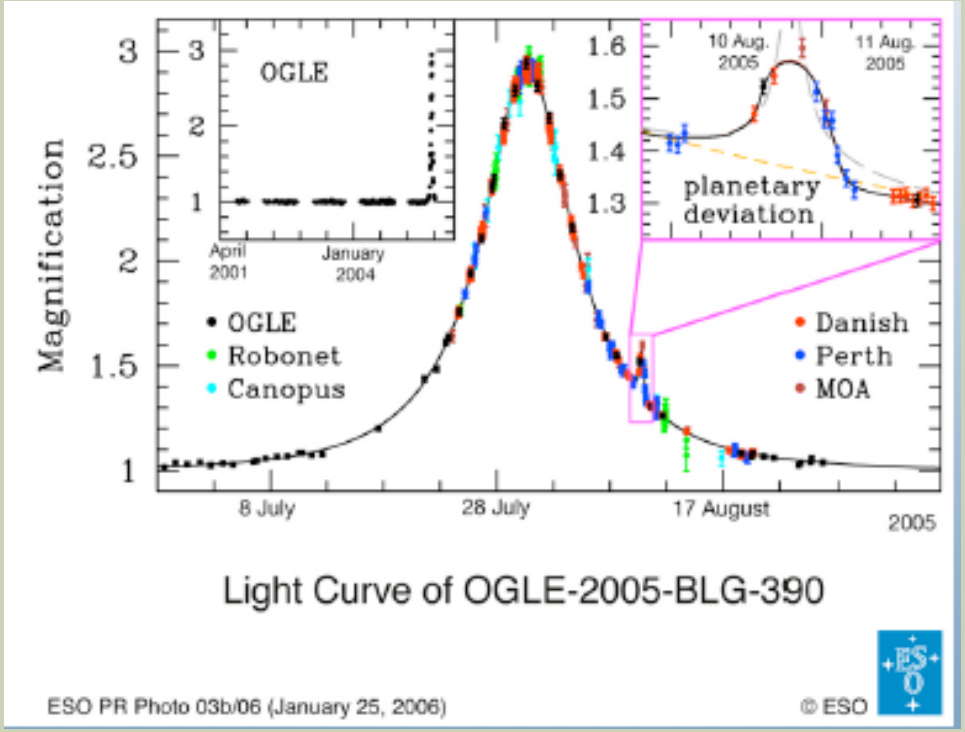
Allesbehalve gemakkelijk omdat de ster vele malen helderder is dan de exoplaneet.

EXOPLANETEN

5) Micro lensing

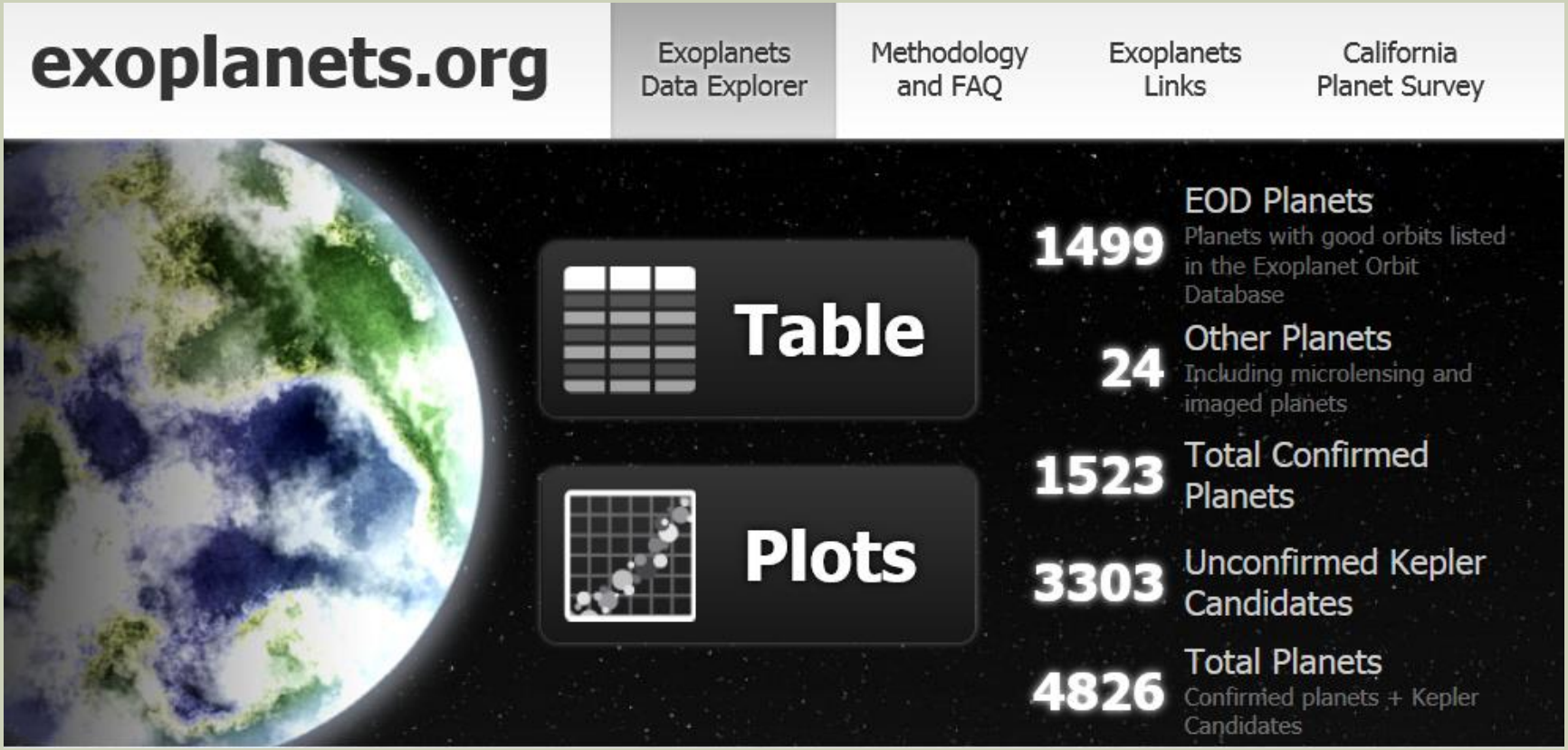
Zwaartekracht werkt als lens en versterkt het licht van een achtergrond ster.

Signaal van ster + klein signaal van pla-neet rond ster wordt zichtbaar.



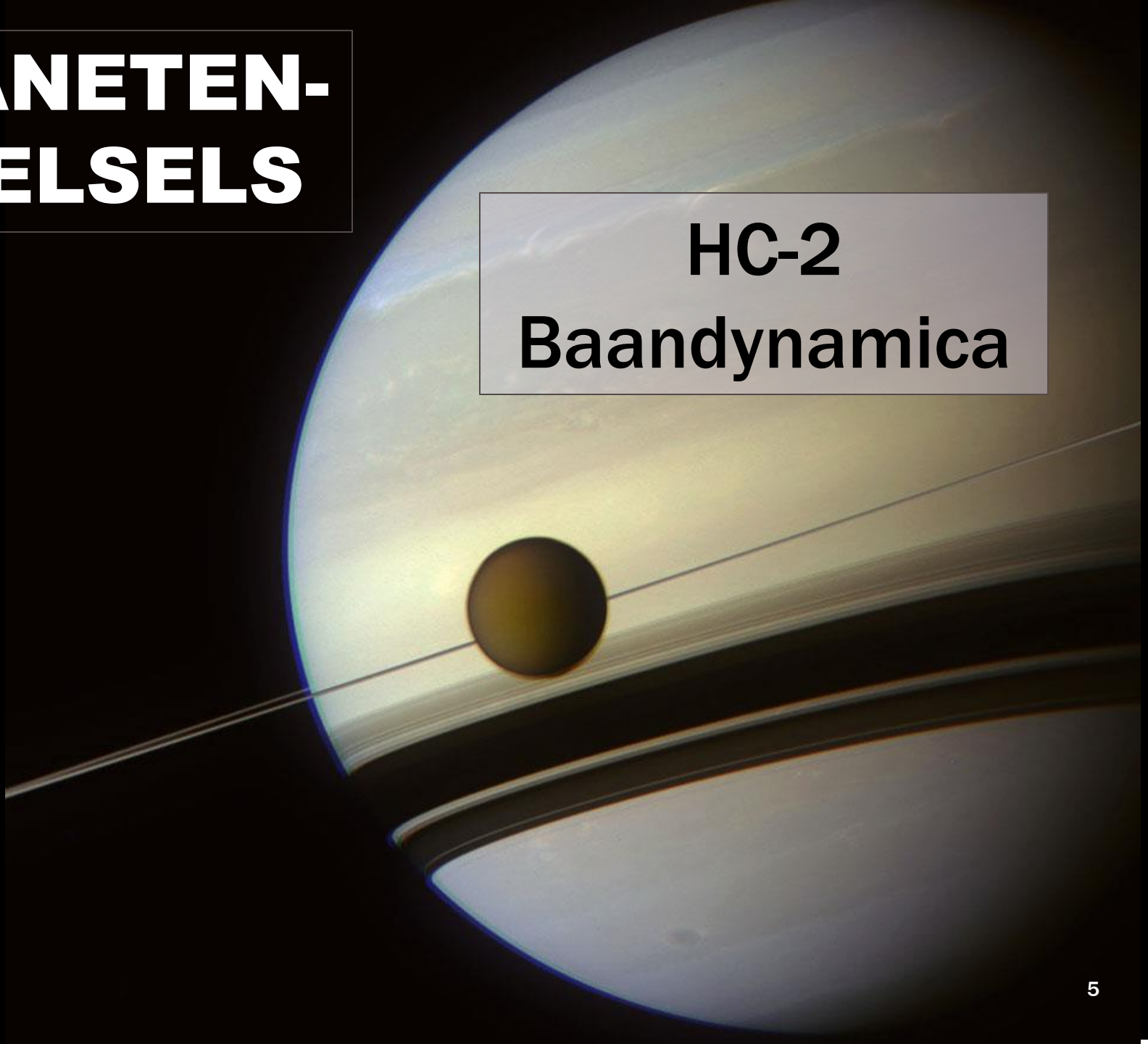
EXOPLANETEN

Genoeg detecties om statistische conclusies te trekken.



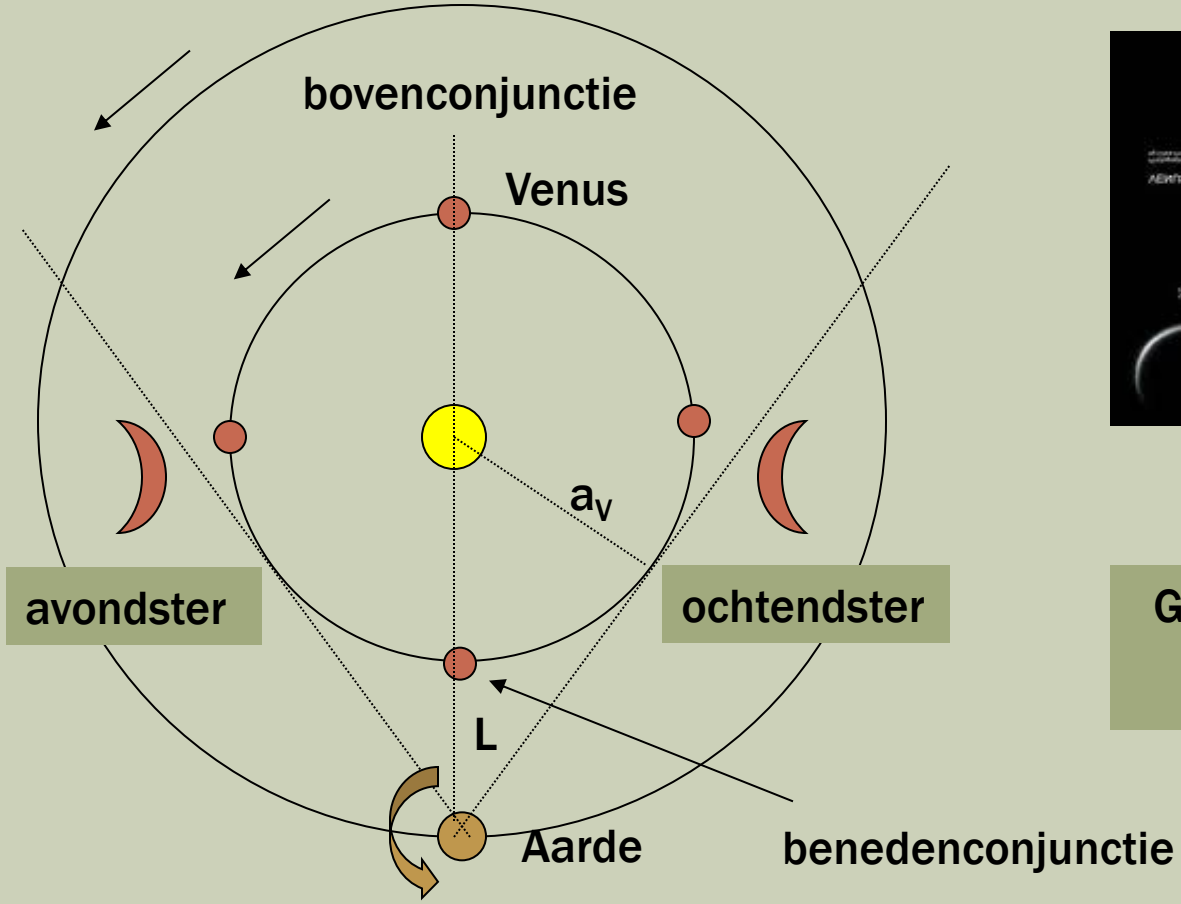
PLANETEN-STELSELS

HC-2
Baandynamica



BEWEGINGEN VAN PLANETEN

Vocabulair voor binnen planeten (Mercurius / Venus)

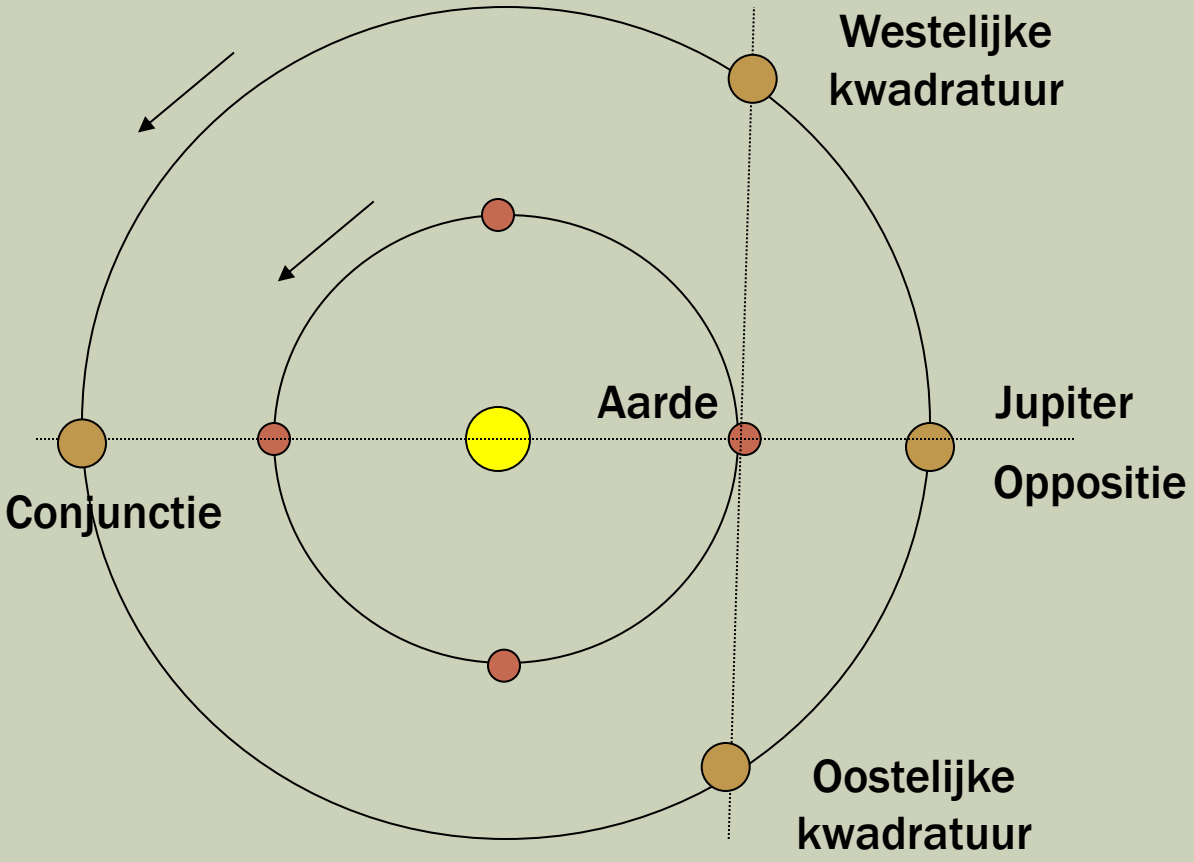


Grootste elongatie L

$\sin L = a_V / a_A$

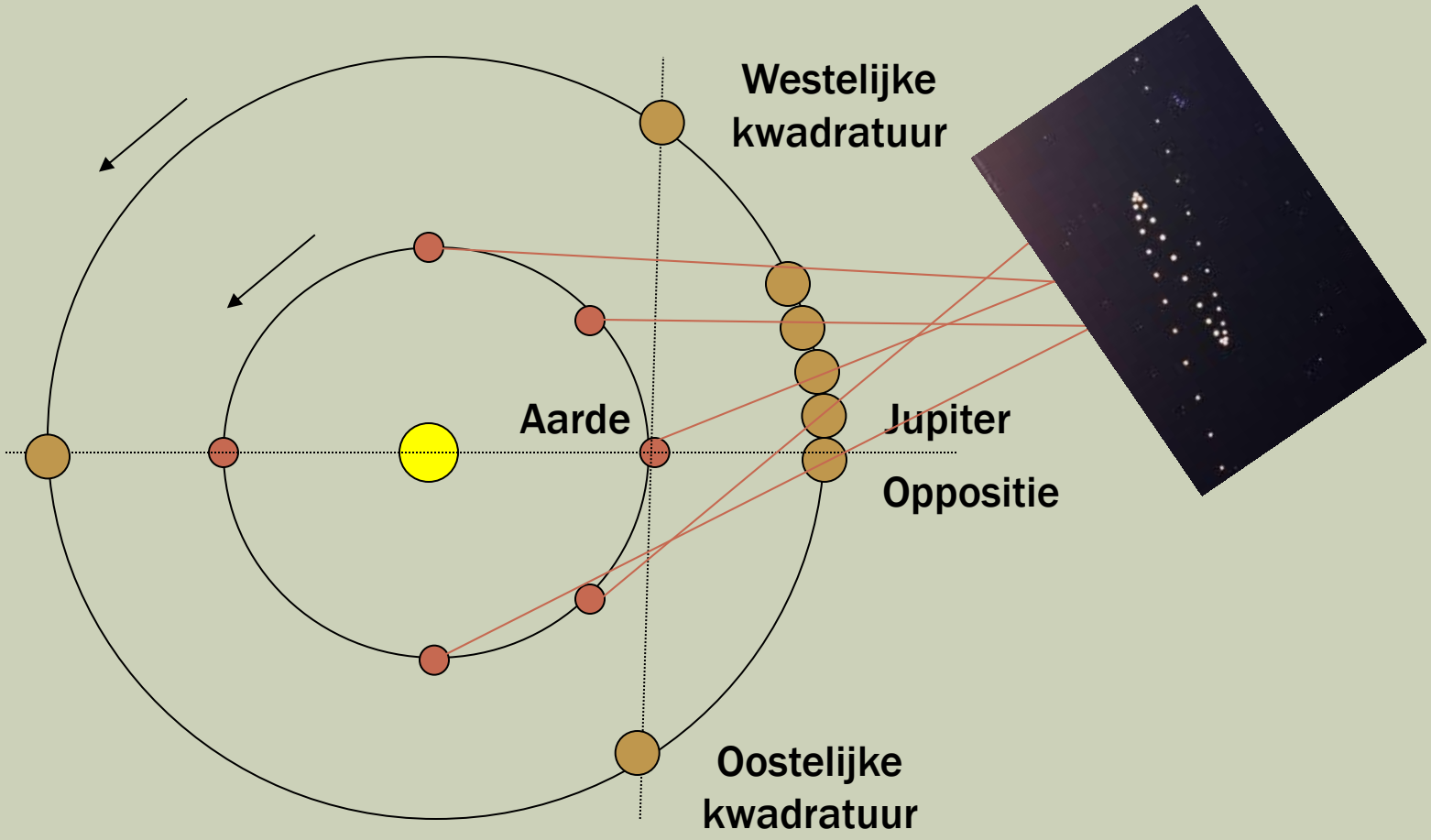
BEWEGINGEN VAN PLANETEN

Vocabulair voor buiten planeten (Mars - … – Neptunus)



BEWEGINGEN VAN PLANETEN

Vocabulair voor buiten planeten (Mars - … – Neptunus)



STEL DE JUISTE VRAAG

Uit waarnemingen kun je veel leren over hoe de planeten om de zon bewegen. Waar het echter om gaat is te begrijpen:

Waarom planeten om de zon bewegen zoals ze dat doen.

Hier komen Newton en Kepler om de hoek kijken.

WETTEN VAN NEWTON

- 1. In de afwezigheid van een kracht voert een deeltje een beweging met constante snelheid uit.
- 2. actie = - reactie:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

- 3. De versnelling van een deeltje evenredig met de op dat deeltje uitgeoefende kracht en omgekeerd evenredig met de massa van het deeltje:

$$\frac{d^2(m\vec{r})}{dt^2} = \vec{F}$$

- 4. Gravitatie wet:

  met G = $6.668.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

$$\vec{F}_{g,12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\hat{r}$$

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad \text{en} \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

WETTEN VAN NEWTON

Zwaartekrachts versnelling

- Vanuit de gravitatiewet wordt de valversnelling gedefinieerd

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}_g(\vec{r})}{m} = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$$

- De versnelling is dus onafhankelijk van de massa van het object dat versnelt. BEWIJS
- We doen alsof alle massa in het massa middelpunt is gecentreerd, of anders gezegd: de kracht grijpt aan in het centrum van het object.
- Voorbeeld. $M_{aarde} = 59.7.10^{23}$ kg; $R_{aarde} = 6.4.10^{6}$ m

  → $g_{aarde} = 9.78$ m/s

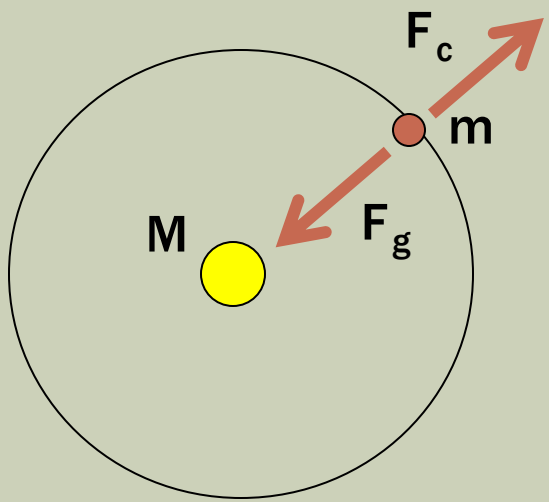
OVERZICHT VALVERSNELLINGEN

	Valversnelling m/s^2		Valversnelling m/s^2
Mercurius	3.7	Jupiter	24.8
Venus	8.9	Saturnus	10.5
Aarde	9.8	Uranus	8.9
Mars	3.7	Neptunus	11.1
Zon	274		

$M_{zon} = 1.99.10^{30}$ kg en $R_{zon} = 0.696.10^{9}$ m

→ $g = 6.668.10^{-11} \,.\, 1.99.10^{30} / (0.696.10^{9})^2 = 273.9 \text{ m/s}^2$

BEWEGINGEN VAN PLANETEN



Centripetale kracht

$$F_c = mv_c^2/r$$

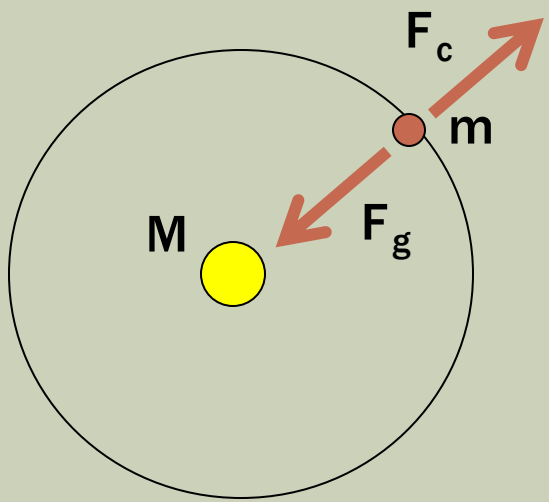
Gravitatiewet

$$F_g = G\,Mm/r^2$$

Een planeet (met massa m) doorloopt een stabiele baan wanneer $F_c = F_g$, dus

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv_c^2}{r} \Leftrightarrow v_c = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

BEWEGINGEN VAN PLANETEN



Centripetale kracht

$$F_c = mv_c^2/r$$

Gravitatiewet

$$F_g = G\,Mm/r^2$$

Stabiele baan betekent ook:

$E_{tot} = E_{kin} + E_{grav} = ½\, mv_c^2 - GMm/r = \text{constant}$

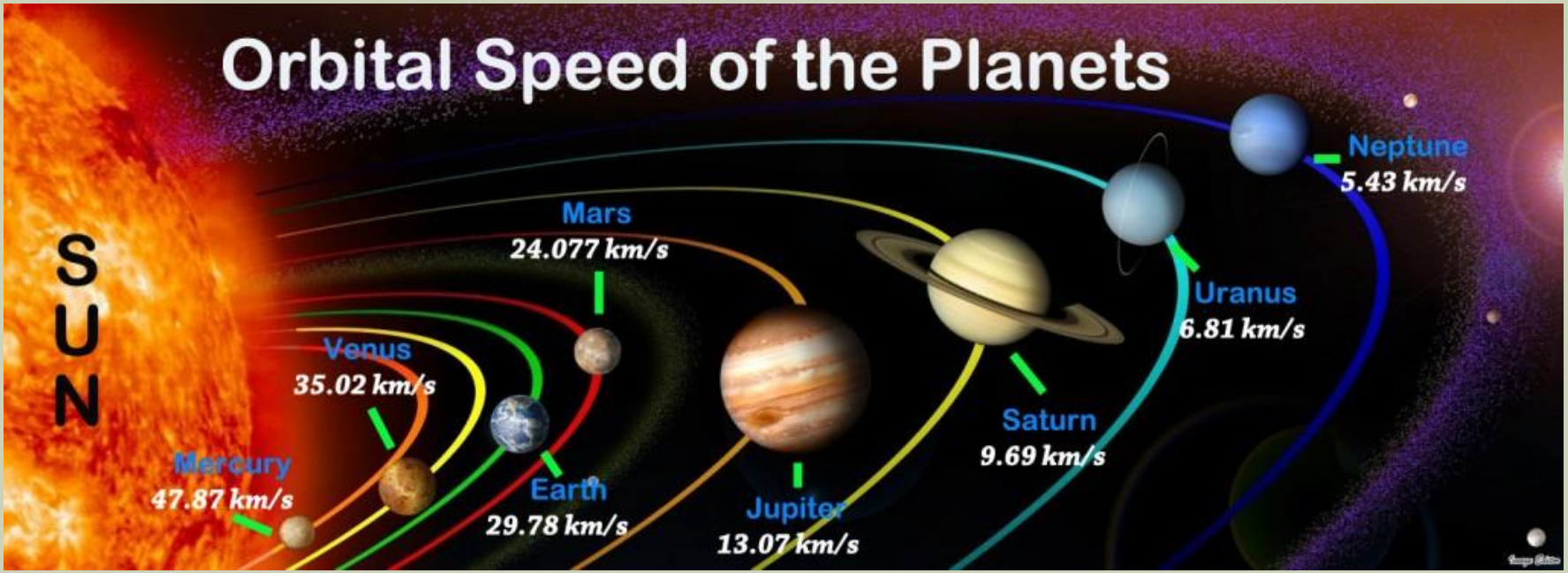
$E_{tot} < 0$: gebonden systeem

$E_{tot} = 0$: ontsnappingssnelheid →

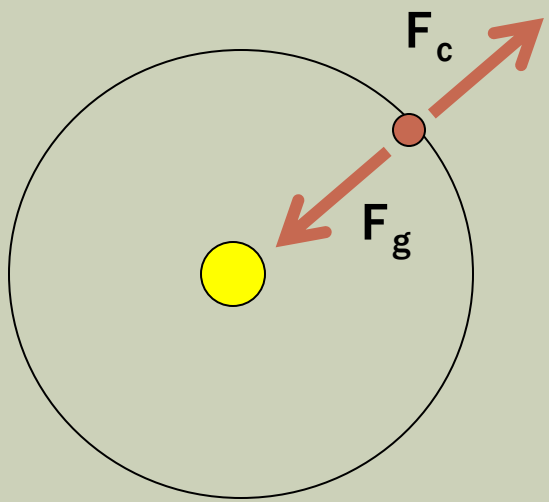
$E_{tot} > 0$: ongebonden systeem

$$v_e = \sqrt{2\frac{GM}{r}} = \sqrt{2}\,v_c$$

GEMIDDELDE HOEKSNELHEDEN PLANETEN



BEWEGINGEN VAN PLANETEN



Centripetale kracht

$$F_c = mv_c^2/r$$

Gravitatiewet

$$F_g = G\,Mm/r^2$$

Omdat $v_c = 2\pi r/P$ kun je uit $F_c = F_g$ ook afleiden:

$$GM = v_c^2 r = (2\pi r/P)^2\, r \quad \rightarrow \quad P^2/a^3 = 4\pi^2/(GM)$$

WETTEN VAN KEPLER

DERDE WET VAN KEPLER

Het kwadraat van de omlooptijd (*P*) van een planeet is evenredig met de derde macht van haar gemiddelde afstand (*a*) (halve lange as) tot de zon ofwel:

$$P^2 / a^3 = \text{constant} \rightarrow P_1^2 : P_2^2 = a_1^3 : a_2^3$$

let op:

1) 'a' is in deze niet helemaal gelijk aan r, want tot nu toe zijn we van een cirkelvormige baan uitgegaan, en dat klopt alleen in benadering, want
2) we moeten wel de wederzijdse zwaartekracht meenemen (ook al is de zon in ons zonnestelsel zoveel zwaarder).

UNIFORME BEWEGING VAN HET MMP

- Een planeet heeft ook een massa (m_2) die voor een exacte oplossing van de baanbeweging meegenomen moet worden:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{12}$$

met $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -\vec{r}_{21}$

- De som van de vergelijkingen geeft:

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = 0$$

- Definieer massamiddelpunt (MMP):

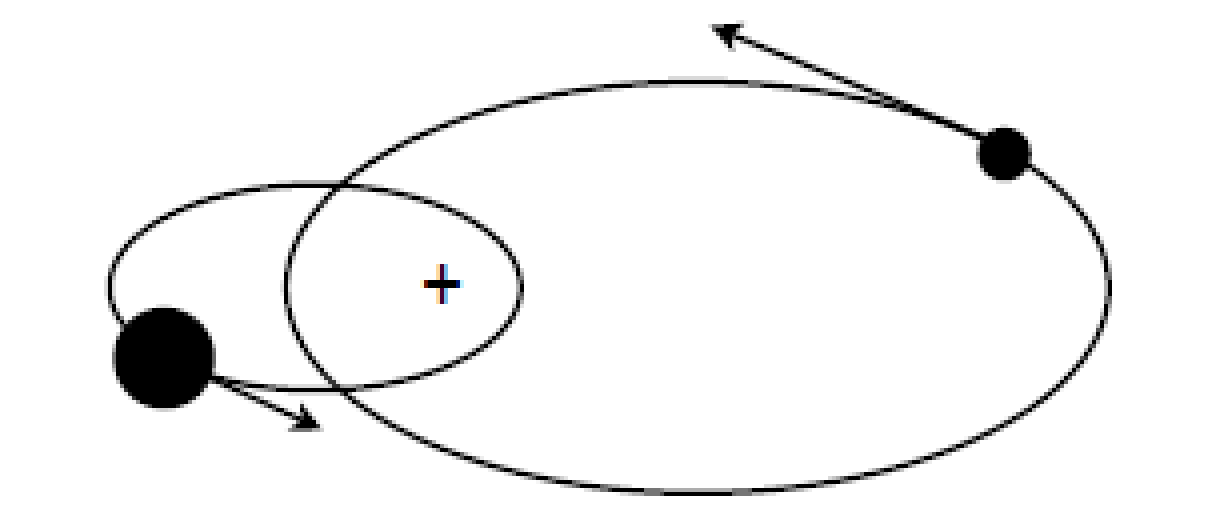
$$\vec{R} \equiv \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

- MMP voert uniforme beweging uit:

$$\ddot{\vec{R}} = \frac{m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2}{m_1 + m_2} = 0$$

UNIFORME BEWEGING VAN HET MMP

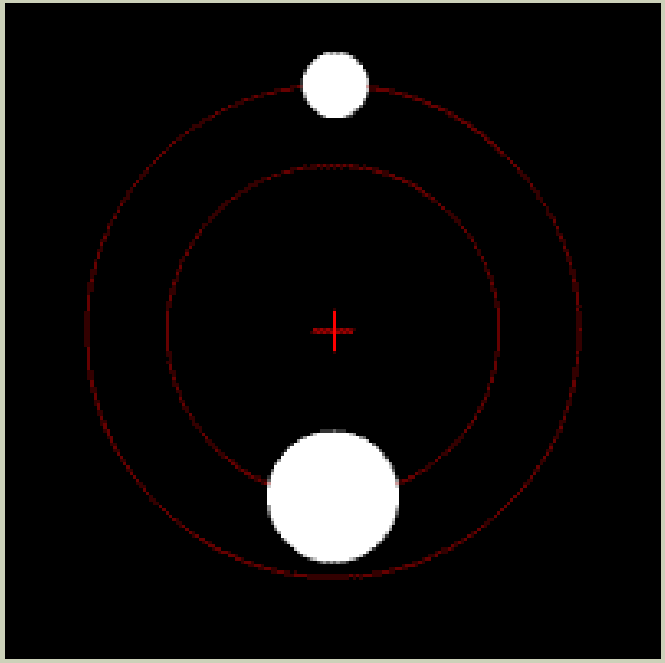
- Dus twee objecten bewegen om hun gemeenschappelijk MMP.
- Het verschil in massa bepaalt waar het MMP is gesitueerd. Bij objecten met een gering massa verschil, ligt het MMP niet in de buurt van het zwaartepunt van het zwaartste object.



UNIFORME BEWEGING VAN HET MMP

- Dus twee objecten bewegen om hun gemeenschappelijk MMP.
- Het verschil in massa bepaalt waar het MMP is gesitueerd. Bij objecten met een gering massa verschil, ligt het MMP niet in de buurt van het zwaartepunt van het zwaartste object.

- Zoiets is vaak typisch voor dubbel-sterren.
- Bij een zon-planeet situatie ligt het MMP in de buurt van het zwaarte-punt van de zon.
- Voorbeeld rechts is typisch voor Pluto en Charon.



… VOOR EEN GEREDUCEERDE MASSA

We reduceren nu de twee bewegingsvergelijkingen

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}$$
$$m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3}\,\vec{r}_{21} = \frac{Gm_1m_2}{r_{21}^3}\,\vec{r}_{12}$$

tot een vergelijking voor de relatieve beweging van een testdeeltje met gereduceerde massa

$$\ddot{\vec{r}}_1 - \ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{r}}_{12} = -G\,\frac{m1+m2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12} \qquad \Leftrightarrow \mu\ddot{\vec{r}}_{12} = -G\,\frac{\mu M}{|r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}$$

met de gereduceerde massa $\mu = m_1m_2/(m_1+m_2) = m_1m_2/M$

Let op: M is hier niet de massa van de zon !!

… VOOR EEN GEREDUCEERDE MASSA

Dus de bewegingen van twee deeltjes o.i.v. hun wederzijdse zwaartekracht wordt nu beschreven door de beweging van een testdeeltje met gereduceere massa μ rond het MMP.

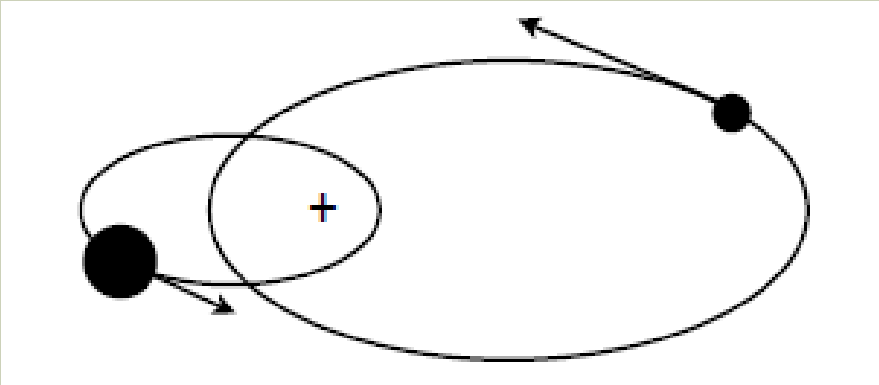
$$\mu \ddot{\vec{r}}_{12} = -G \frac{\mu M}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

en de individuele posities t.o.v. het MMP worden gegeven door

$$\vec{r}_1 = \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}, \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}_{12}$$

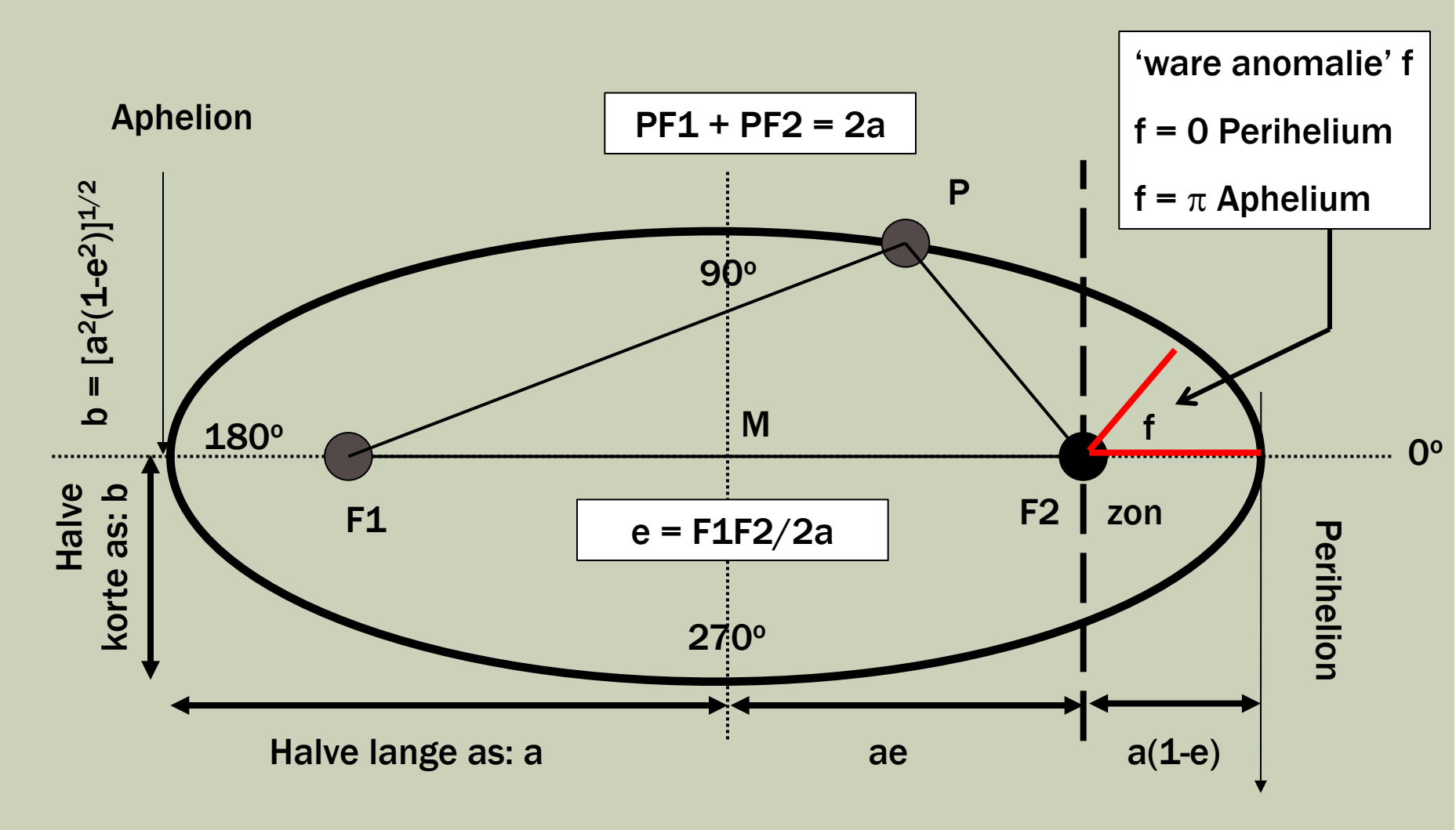
SAMENVATTEND

Twee objecten die om elkaar draaien, beschrijven een baan van dezelfde vorm (ellips) met relatieve afmetingen m_1/M en m_2/M, waarbij het zwaardere object een baan beschrijft met een kleinere afmeting.



Speciaal geval: wanneer de massa van het ene object vele malen groter is dan dat van het andere object, dan ligt het MMP zeer dicht in de buurt van het zwaartepunt van het zwaardere object en dan 'lijkt het' alsof alleen het lichtere object beweegt.

HERHALING ELLIPSEN

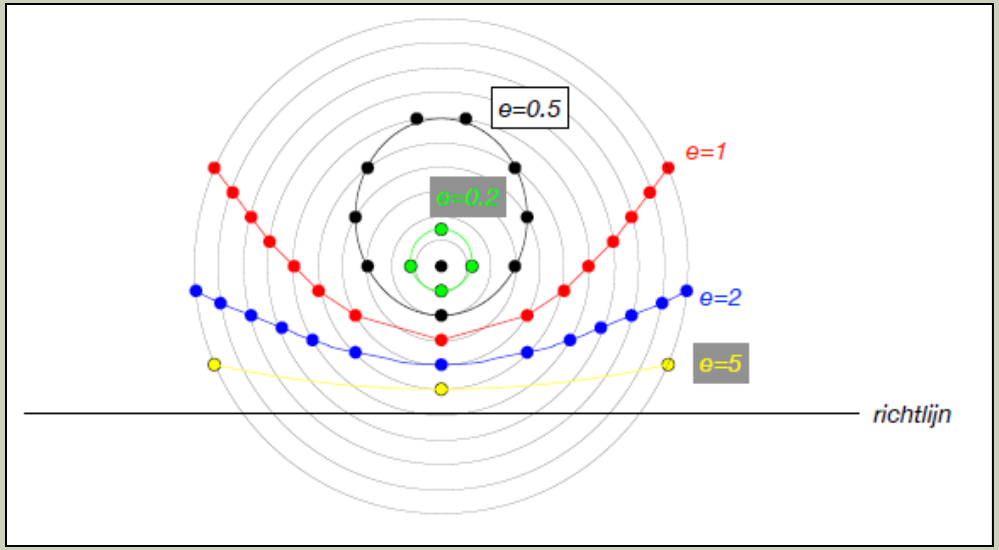


HERHALING ELLIPSEN

- e=0 Cirkel
- 0<e<1 Ellips
- e = 1 Parabool
- e > 1 Hyperbool (ongebonden)

$$\mu \ddot{\vec{r}}_{12} = -G \frac{\mu M}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$$

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos f}$$



DE DRIE WETTEN VAN KEPLER
(NET IETSJE PRECIEZER)

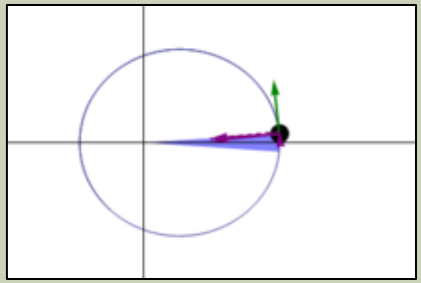
EERSTE WET VAN KEPLER

De baan van een planeet is een ellips met het MMP (dus niet de zon) in één van de brandpunten.

→ Ook de zon doorloopt een ellips, geschaald met $-m_2/(M_{zon}+m_2)$

TWEEDE WET VAN KEPLER

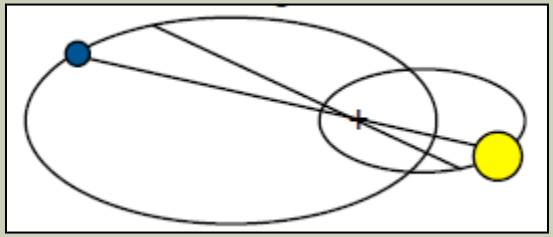
De lijn planeet - MMP (zon) doorloopt in gelijke tijden gelijke oppervlakken.



DERDE WET VAN KEPLER

$P^2 = 4\pi^2 a^3 / G(M_{zon} + m_2)$ en dus ook

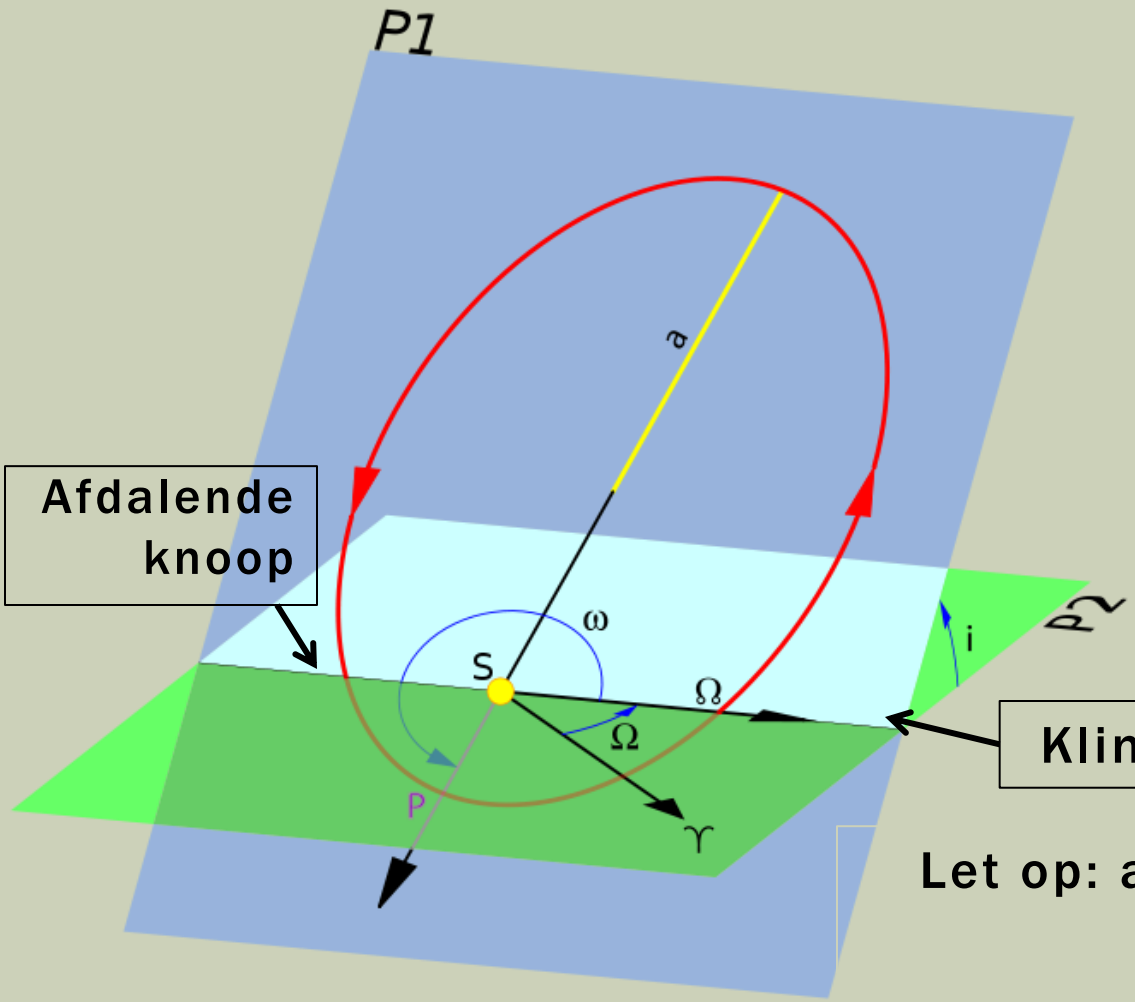
→ $P_1^2 (m_1+M) : P_2^2 (m_2+M) = a_1^3 : a_2^3$



ZES BAANELEMENTEN

- Nu moet deze kennis zo worden omgezet, dat hiermee de beweging van een planeet aan de hemel kan worden gekarakteriseerd → zes baanelementen nodig.
- Twee parameters om de **vorm van de baan** te beschrijven:
  1. Halve lange as, a
  2. Excentriciteit, e
- Drie parameters voor de **oriëntatie van het baanvlak**:
  3. Inclinatie (baanhelling), i
  4. Lengte van de klimmende knoop, Ω, richting lentepunt (γ)
  5. Perihelion lengte, ω, gemeten vanaf de klimmende knoop
- Een parameter om het **nulpunt van baanbeweging** te fixeren:
  6. Moment van perihelion passage (of baanpositie op een gegeven moment, de 'epoche').

ZES BAANELEMENTEN



- P1 Plane of planetary motion
- P2 Reference plane (ecliptica)
- Ω in vlak ecliptica en ω in baanvlak

Let op: alleen gegevens die de baan vastleggen.

WAAR STAAT DIE PLANEET ?

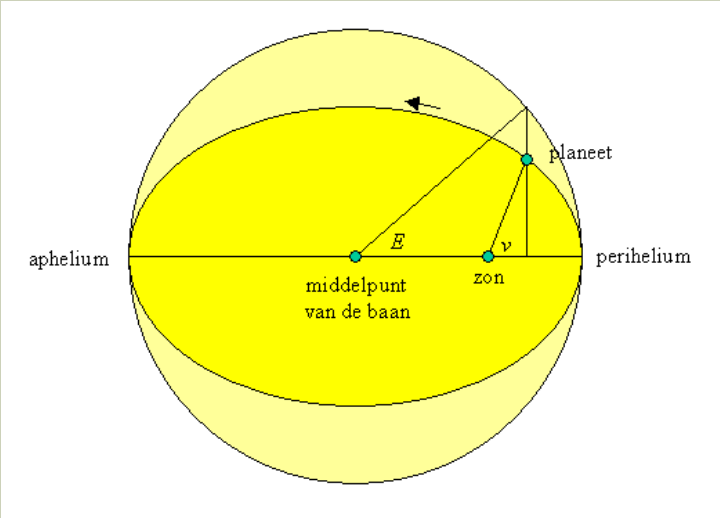
- Oplossing van de baanvergelijking is gegeven door

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$$

- Maar dat is een functie van f en niet van t en daarom moeilijk praktisch te gebruiken.
- Er is echter een (ietwat meetkundige) oplossing, door de parameters die een beweging langs een ellipsbaan beschrijven te definiëren voor een cirkel met een straal gelijk aan a en een middelpunt dat halverwege de beide brandpunten ligt en vervolgens een tijdsafhankelijk in te brengen m.b.v de tweede wet van Kepler.
- Dit is zoals het hier staat absoluut onbegrijpelijk en valt ook buiten de stof van dit college. FYI only:

De middelbare anomalie M is de hoek die bij een eenparige cirkelvormige beweging met de

KEPLER VERGELIJKING



1) De **excentrische anomalie E** is de hoek in het middelpunt van de baan tussen peri-helium en het punt waar de loodlijn van de planeet op de lange as van de ellips, de omschrijvende cirkel van de ellips snijdt.

2) De **middelbare anomalie M** is de hoek die bij een eenparige cirkelvormige beweging met dezelfde omlooptijd als de planeet zou zijn afgelegd; dus M is de denkbeeldig afgelegde hoek.

Als de planeet op het tijdstip t_0 in het perihelium is en P de omlooptijd is, dan is op het tijdtsip t:

$$M = 2\pi(t-t_0)/P$$

De middelbare anomalie is de hoek die bij een eenparige cirkelvormige beweging met de

KEPLER VERGELIJKING

3) Hieruit kun je de vergelijking van Kepler afleiden:

$$M = E - e \sin E$$

(M, E in radialen)

Anders e nog vermenigvuldigen met $360^o/2\pi$

4) Nu ben je er; want

$$t \rightarrow M \rightarrow E \rightarrow r \rightarrow f$$

5) En hoe werkt dat dan in het echt ?

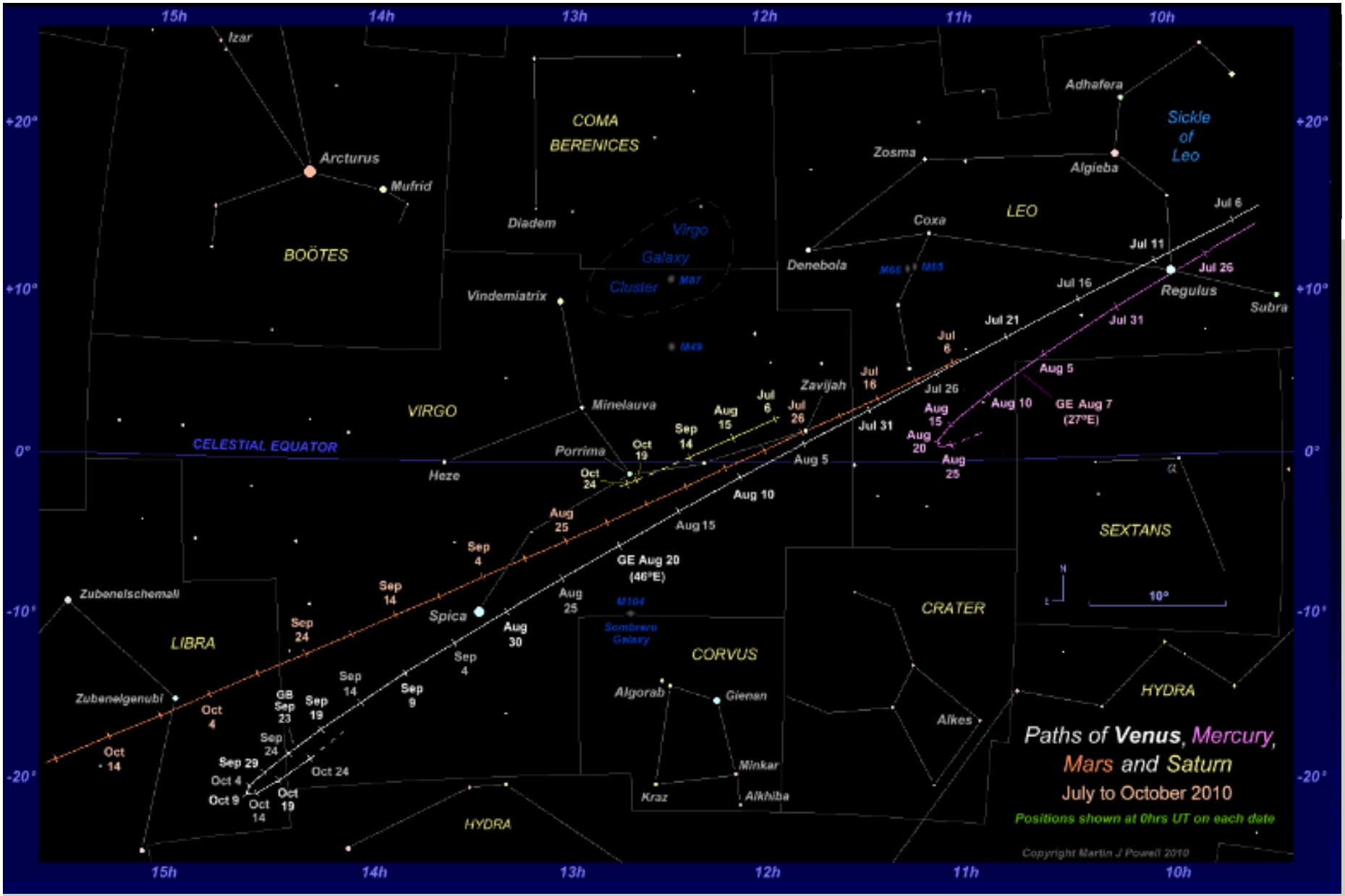
WAAR STAAT DIE PLANEET ?

- Met (a, e, t_0) en gebruik van de Kepler vergelijking, kan de positie langs de baan op moment t worden bepaald.
- Met (i, Ω, ω) staat de positie in ecliptische coordinaten vast. Dit moet dan naar equatoriale coordinaten (α,δ) worden getransformeerd, onder correctie van $(\alpha,\delta)_{2000}$

- Gebruik ephemerides = tabel met (α,δ) van planeten op gegeven tijdstip *t*

→ Astronomical Almanac: http://asa.usno.navy.mil

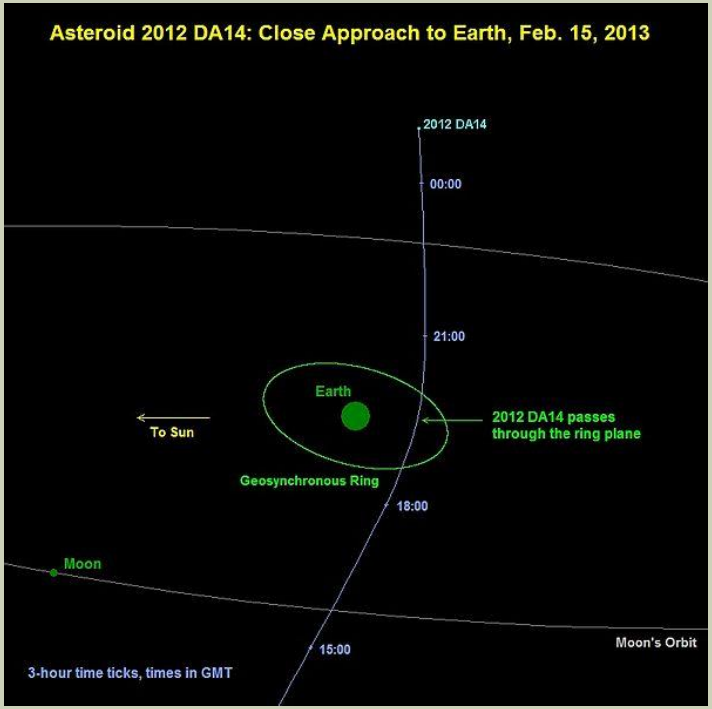
→ NASA Jet Propulsion Laboratory, Horizon system
http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi


Paths of Venus, Mercury, Mars and Saturn
July to October 2010
Positions shown at 0hrs UT on each date
Copyright Martin J Powell 2010
15h
14h
13h
12h
11h
10h
+20°
+10°
0°
-10°
-20°
Izar
Arcturus
Mufrid
BOÖTES
COMA BERENICES
Diadem
Virgo Galaxy Cluster
M87
M49
Vindemiatrix
VIRGO
Minelauva
Porrima
Heze
CELESTIAL EQUATOR
Spica
Zubenelschemali
Zubenelgenubi
LIBRA
Zosma
Denebola
Coxa
M66
M65
LEO
Adhafera
Algieba
Sickle of Leo
Regulus
Subra
Zavijah
GE Aug 20 (46°E)
GE Aug 7 (27°E)
M104
Sombrero Galaxy
CORVUS
Algorab
Gienah
Minkar
Alkhiba
Kraz
HYDRA
CRATER
Alkes
SEXTANS
10°
Jul 6
Jul 11
Jul 16
Jul 21
Jul 26
Jul 31
Aug 5
Aug 10
Aug 15
Aug 20
Aug 25
Aug 30
Sep 4
Sep 9
Sep 14
Sep 19
Sep 23
Sep 24
Sep 29
Oct 4
Oct 9
Oct 14
Oct 19
Oct 24

EN HET WERKT OOK ANDERSOM

- Meet van een object op verschillende tijdstippen (α,δ).
- Probeer een fit te maken met 6 parameters die de waarnemingen het beste reproduceert.
- Je moet in staat zijn om de positie van een object met deze parameters te voorspellen.

  Vooral van belang om planetoïden/asteroïden in kaart te brengen i.v.m. een wereldwijd programma om aardscheerders op tijd te zien aankomen.
- Interessant: Nederlanders en planetoïden.



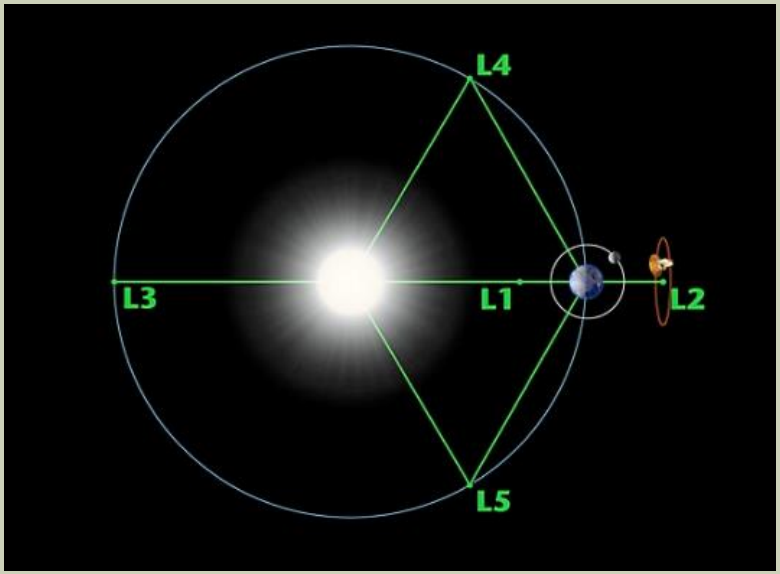
WAT WANNEER ER MEER DAN TWEE OBJECTEN ZIJN ?

- Voor een 2-lichamen probleem is er een exacte oplossing, maar voor meer dan twee objecten moet de oplossing numeriek worden gezocht; veelal geen gesloten banen.
- Onderlinge zwaartekracht verstoort de Keplerbanen
  - → langzame verandering van baanelementen, o.a. precessie van het perihelion, veranderingen van inclinatie, e.d.
  - → baan resonanties mogelijk.

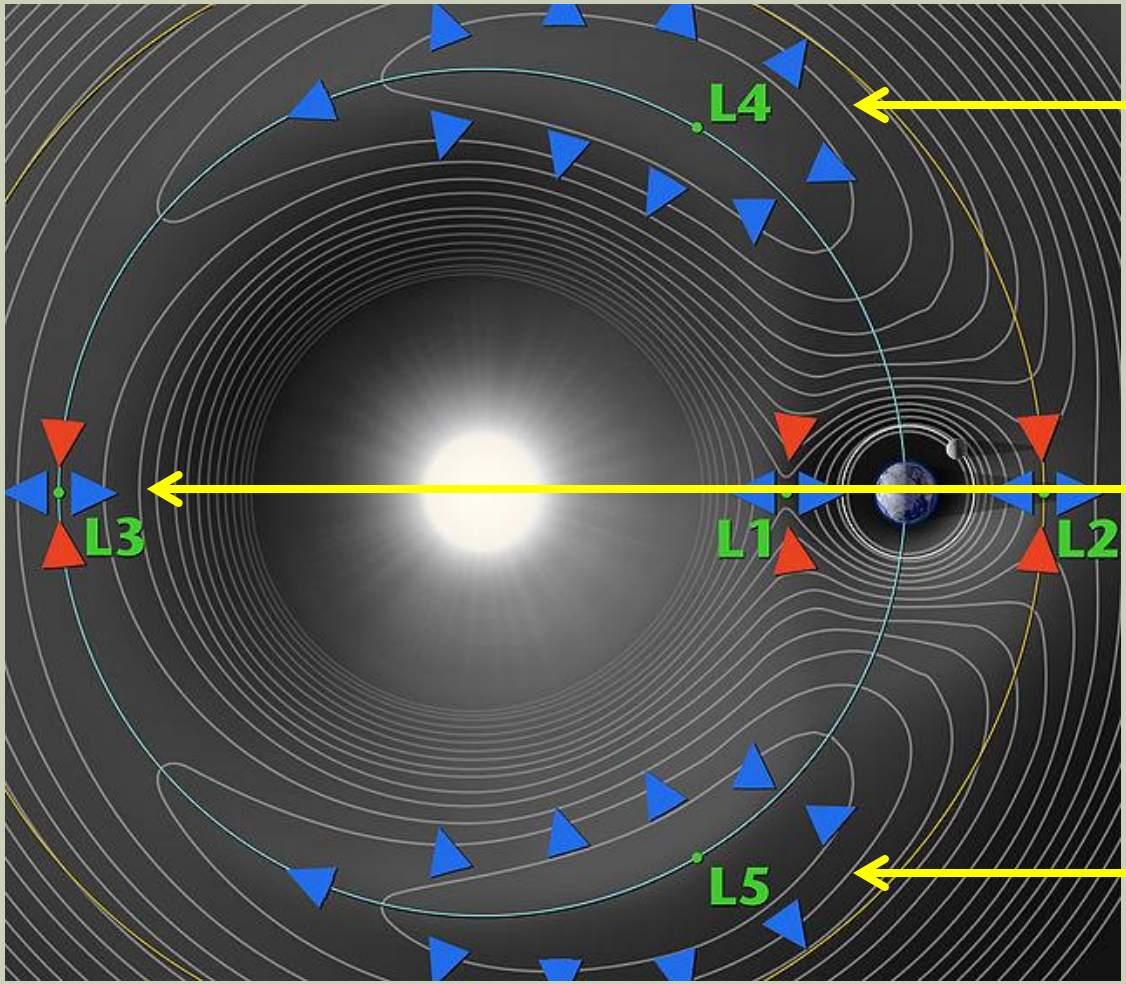
- Een bijzonder geval is het 3-lichamen probleem waarbij $m1 \gg m3$ en $m2 \gg m3$
  - → Baanbeweging m1 en m2 niet beïnvloed door m3
  - → m3 beweegt in gezamelijke, tijdsafhankelijke potentiaal van m1+m2

LAGRANGE PUNTEN

- Ieder tweelichamensysteem dat draait rond een gemeen-schappelijk zwaartepunt heeft vijf Lagrangepunten, waarvan er drie liggen op de verbindingslijn tussen de twee hemellichamen.
- Een Lagrange punt is een bijzonder geval van een baanresonantie.
- In een Lagrange punt is de netto zwaartekracht nul.
- Een 'klein' object kan hier een vaste relatieve positie behouden t.o.v. twee objecten die om een gemeenschappelijk zwaartepunt draaien. → Ideaal voor een ruimtevaartuig.



LAGRANGE PUNTEN

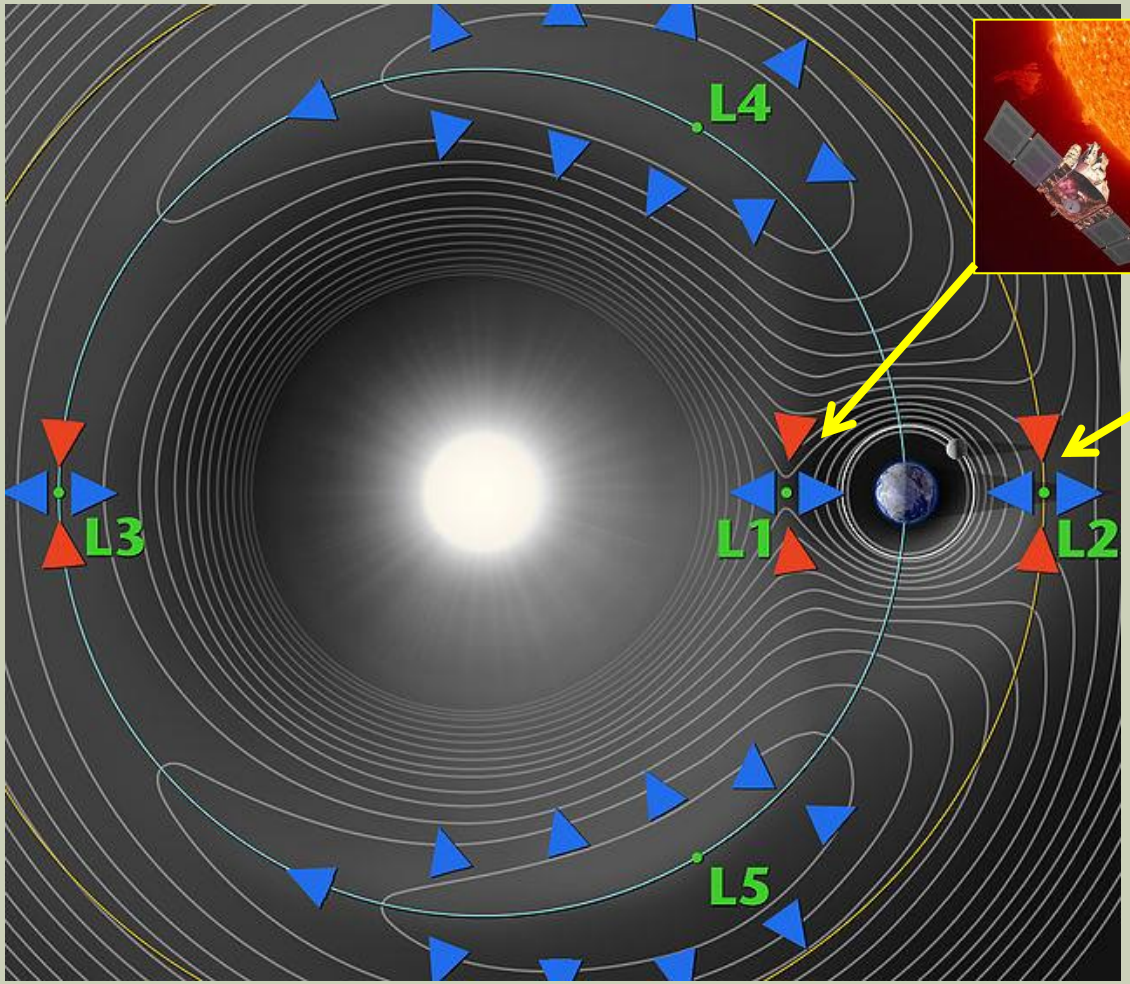


Stabiel

Niet stabiel

Wel bruikbaar

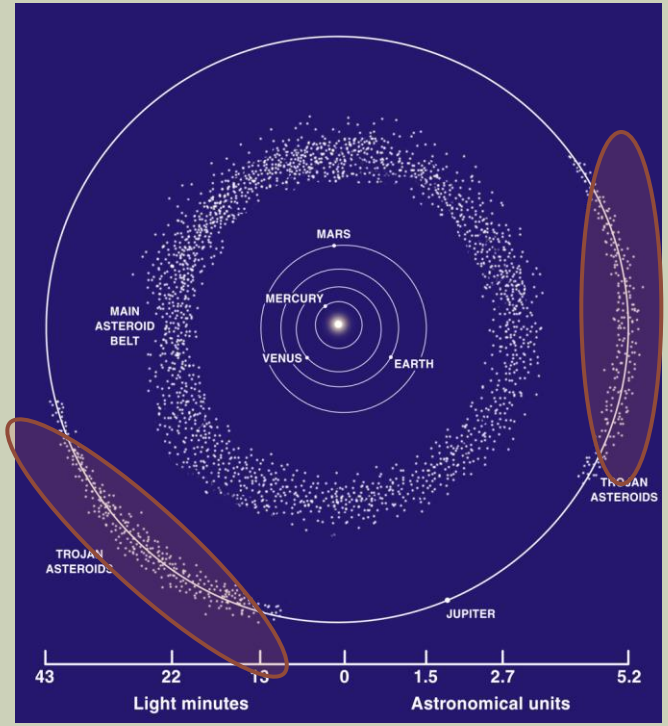
LAGRANGE PUNTEN



De Lagrangepunten L4 en L5 zijn de enige Lagrangepunten die zich even snel bewegen in de omloopbaan rond de zon, omdat ze op dezelfde afstand van de zon gelegen zijn als de aarde.

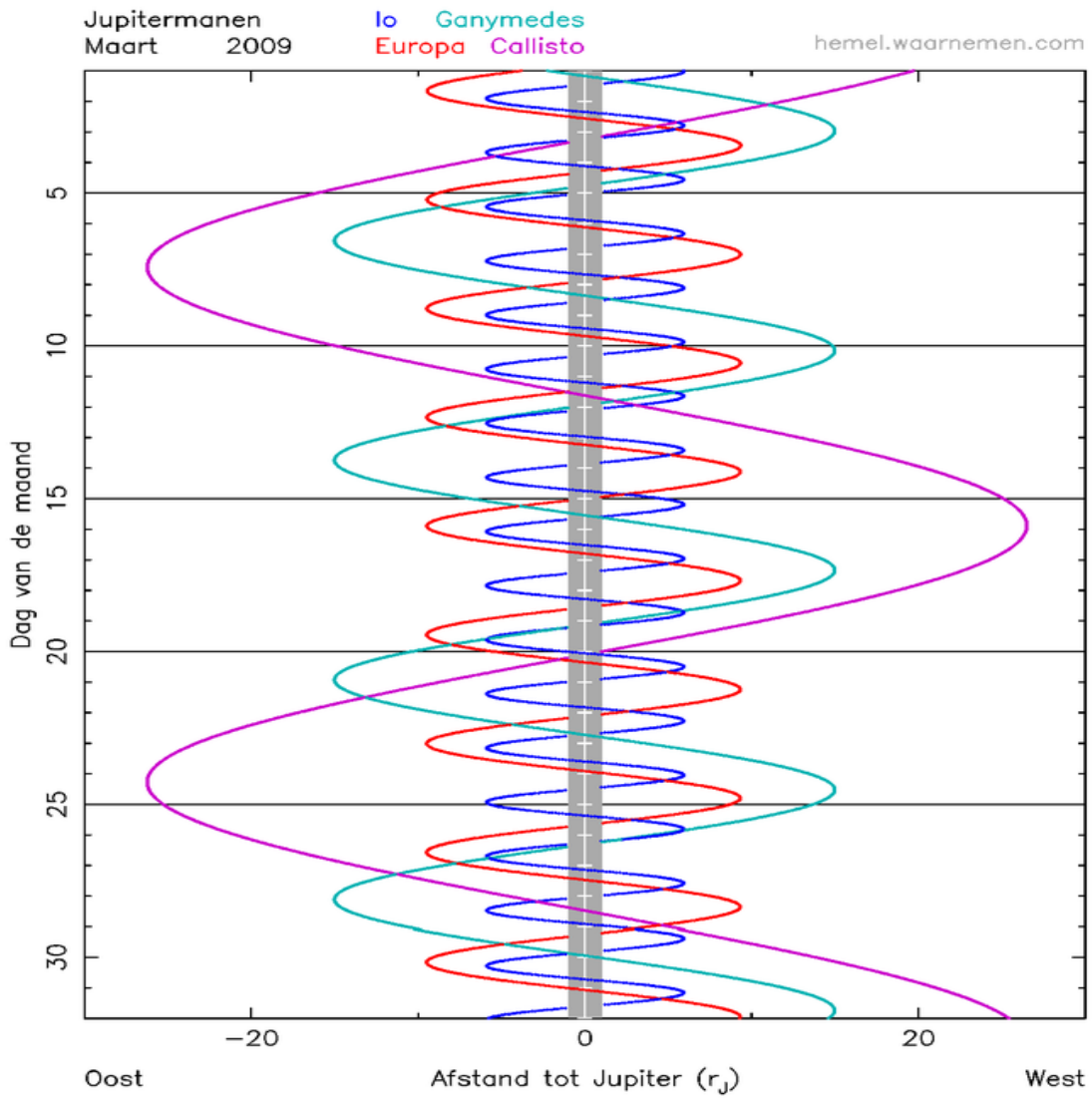
LAGRANGE PUNTEN EN TROJANEN

- L4 en L5 functioneren als een soort vuilnisbelt; zeer stabiele punten (miljarden jaren).
- Bereken zelf je Lagrange punten:
- http://orbitsimulator.com/formulas/LagrangePointFinder.html



- Planetoiden in L4 naar Trojaanse en in L5 naar Griekse strijders genoemd.
- Trojanen ook ontdekt bij Mars en Uranus; zelfs de Aarde heeft er een.
- Saturnus heeft Trojaanmanen systemen.

Oefen opgave



Fase diagram manen Jupiter (figuur)

P_J = 11.862 jaar

Afstand Jupiter-Ganymedes = $1.071.10^6$ km

M_{zon} = $1.99.10^{30}$ kg

Oefen opgave

a) Bereken de afstand zon-Jupiter uit de nauwkeurig bekende baanperiode van Jupiter. Verwaarloos daarbij de massa van Jupiter.

b) Bereken de massa van Jupiter m.b.v. het gegeven maanfase diagram.

c) Bereken de afstand Jupiter-Io.

d) Bereken opnieuw de afstand zon-Jupiter, maar verwaarloos de massa van Jupiter nu niet meer.

Oplossing opgave

a) Derde wet van Keppler: $P^2/a^3 = 1$ [voor a in AU en P in jaren !]

→ $a_J = P^{2/3} = (11.862)^{2/3} = 5.201$ AU

Oplossing opgave

a) Derde wet van Keppler: $P^2/a^3 = 1$ [voor a in AU en P in jaren !]

→ $a_J = P^{2/3} = (11.862)^{2/3} = 5.201$ AU

b) Uit het fase diagram volgt: P(Ganymedes) = 7.1 dag

→ $P^2/a^3 = 4\pi^2 / GM_J$

→ $M_J = 4\pi^2 a^3/GP^2 =$

$= 4\pi^2(1.071.10^9 \text{ m})^3 / [6.67.10^{-11} \text{ kg}^{-1}\text{m}^3\text{s}^{-2} \times (6.13.10^5 \text{ s})^2] =$

$= 0.1933 \times 10^{28} = 1933 \times 10^{24}$ kg

Oplossing opgave

c) Uit het fase diagram volgt: P(Io) = 1.77 dag

→ $P^2/a^3 = 4\pi^2 / GM_J$

→ $a = [\, P^2 GM_J / 4\pi^2 \,]^{1/3} =$

$[(152928)^2 \times 6.67.10^{-11} \times 1933.10^{24} / 4\pi^2]^{1/3} = 4.24.10^5$ km

Check: uit fase diagram blijkt inderdaad dat $a_{IO} < a_{Gan}$

Oplossing opgave

c) Uit het fase diagram volgt: P(Io) = 1.77 dag

→ $P^2/a^3 = 4\pi^2 / GM_J$

→ $a = [\ P^2GM_J / 4\pi^2\ ]^{1/3} =$

$[(152928)^2 \times 6.67.10^{-11} \times 1933.10^{24} / 4\pi^2]^{1/3} = 4.24.10^5$ km

Check: uit fase diagram blijkt inderdaad dat $a_{IO} < a_{Gan}$

d) Vergelijk nu: $a_M = [\ P^2GM / 4\pi^2]^{1/3}$ vs.

$a_{M+MJ} = [P^2G(M+M_J) / 4\pi^2]^{1/3}$

dit geeft:

$a_M / a_{M+MJ} = [M / (M+M_J)]^{1/3} = 0.999$

→ $a_M = 0.999\ a_{M+MJ}$

VOLGENDE WEEK

Aardachtige planeten:

- Baanbeweging en rotatie; interne structuur; oppervlakte processen en
- tectoniek; atmosfeer en broeikaseffect; magnetische velden; leven.