Inleiding Astrofysica
Extract 2009

Vincent Icke ◇ icke@strw.LeidenUniv.nl

---

1. Vrije weglengte

In de astrofysica komt het vaak voor dat we willen uitrekenen hoe een deeltje zich gedraagt dat zeer veel botsingen ondergaat. Eerst moeten wij daarvoor uitrekenen wat de kans is dat het deeltje met een ander botst. De meest gebruikte maat hiervoor is de gemiddelde vrije weglengte. Hiervoor leiden we een eenvoudige formule af, die zeer veel toepassingen heeft. Voorlopig passen wij de formule toe op fotonen in een ster. Later zullen wij ook zien wat de vrije weglengte is voor sterren in sterrenstelsels en voor sterrenstelsels in het Heelal.

Het is alles goed en wel om energie te maken in het binnenste van een ster, maar de straling moet zich ook nog een weg naar buiten banen. Bij het berekenen van de structuur van een ster betekent dat een forse extra complicatie: niet alleen moeten we het stralingsverlies meeberekenen (met de Stefan-Boltzmann regel), en moeten we de energie-opbrengst van kernfusie weten (uit een 'kookboek' voor kernreacties), we moeten ook nog rekening houden met het feit dat straling er niet zomaar uit kan (behalve de neutrino's die bij kernfusie vrijkomen, maar daar zien we hier even van af).

Om te weten hoe erg dit probleem is, gaan we na hoe ver een lichtdeeltje (foton) kan vliegen voordat het in botsing komt met een electrisch geladen deeltje (zoals een electron) in de ster. We bekijken daartoe een stukje Δx van het pad van een foton. In een cylindertje met lengte Δx en dwarsdoorsnede (oppervlak) S, waarin zich n deeltjes per kubieke meter bevinden, vindt het foton een aantal deeltjes op zijn weg gelijk aan

$$\Delta N = nS\,\Delta x \tag{1.1}$$

omdat het aantal simpelweg gelijk is aan de dichtheid maal het volume. Het vermogen van een deeltje om een foton te onderscheppen wordt uitgedrukt met Σ, de `werkzame doorsnede`, dat aangeeft hoeveel vierkante meter trefvlak het deeltje aan het foton presenteert. De kans op een treffer bij het doorlopen van Δx is dus

$$\frac{\text{totaal trefvlak}}{\text{doorsnede}} = \frac{\text{trefvlak}}{\text{doorsnede}} \times \Delta N \equiv \Delta p = \frac{\Sigma}{S}\,\Delta N = n\Sigma\,\Delta x \tag{1.2}$$

Hoe ver komt het foton door k maal een stukje Δx spitsroeden te lopen? Als het foton niet gevangen wordt, legt het een weg

$$\text{padlengte} = x = k\,\Delta x \tag{1.3}$$

af, maar zover zal het niet altijd komen. Het is het eenvoudigst om eerst te kijken wat de kans is dat het foton *niet* wordt onderschept. We hebben

$$\text{kans op vrije doortocht} = 1 - \text{kans op botsing} = 1 - n\Sigma\,\Delta x \tag{1.4}$$

Doen we dit k maal, dan is de kans p op vrije doortocht gelijk aan het product van alle afzonderlijke kansen, en dus

$$p = (1 - n\Sigma\,\Delta x)^k = \left(1 - \frac{1}{k} n\Sigma x\right)^k \tag{1.5}$$

In de limiet voor zeer veel stapjes ($k \to \infty$) wordt dit

$$p = \mathrm{e}^{-n\Sigma x} \tag{1.6 ♠}$$

De kans dat een foton vrijelijk kan passeren neemt dus exponentieel af met de afgelegde weg. De bijbehorende e-waarde is de `vrije weglengte`

$$\lambda_{\mathrm{mfp}} \equiv \frac{1}{n\Sigma} \tag{1.7 ♠}$$

('mfp' staat voor *mean free path*, gemiddelde vrije weglengte).

Vaak gebruikt men niet alleen de vrije weglengte, maar ook de `botsingstijd` t_c. Die vinden we als we nagaan hoe lang het duurt voordat een deeltje met snelheid v botst:

$$t_c = \frac{\lambda_{\mathrm{mfp}}}{v} \tag{1.8 ♠}$$

In het geval van fotonen is de snelheid gelijk aan de lichtsnelheid c, en dus

$$t_c = \frac{1}{n\Sigma c} \tag{1.9 ♠}$$

Laten we nu de waarden voor de Zon eens invullen. De gemiddelde dichtheid van de modale ster is ruwweg gelijk aan de dichtheid van oceaanwater op Aarde, een ton per kuub. Het zijn vooral de electronen die met de fotonen botsen. Per proton is er één electron in de ster; de massa van het proton is 1.67×10^{-27} kg, dus de electrondichtheid is om en nabij 10^{30} deeltjes per kuub. De botsingsdoorsnede van het electron is de Thomson-doorsnede, $\Sigma_T = 6.67 \times 10^{-29}$ m^2. Dus vinden we de schatting

$$\lambda_{\mathrm{mfp}} \approx \frac{1}{66.7} = 1.5 \quad \mathrm{cm} \tag{1.10}$$

De vrije weglengte van een foton in een ster met een straal van zowat een miljoen kilometer is dus op z'n hoogst een paar centimeter! Blijkbaar is het voor een foton ontzettend moeilijk om de weg naar buiten te vinden.

De bijzonder kleine vrije weglengte van fotonen heeft nog een ander gevolg wanneer we opmerken dat de lichtkracht L zeer steil toeneemt met de massa M. Als M erg groot is, is L zo enorm dat de botsingen tussen fotonen en deeltjes een bijdrage gaan leveren aan de druk. In dat geval is P niet meer de gewone gasdruk die we uit de thermodynamica kennen, maar de `stralingskracht`

$$F_{\mathrm{rad}} = \frac{L}{c} \tag{1.11 ♠}$$

waarin c de lichtsnelheid. In de vergelijking van de hydrostatica moeten we dan een extra drukgradiënt invoeren. De `stralingsdruk` P_r is de kracht per oppervlakte, dus

$$P_r = \frac{F_{\mathrm{rad}}}{4\pi r^2} \tag{1.12}$$

Als de straling zich over een afstandje Δr naar buiten wurmt, is de verandering ΔP_r evenredig met het aantal vrije weglengtes λ_{mfp} in Δr, dus

$$\Delta P_r = \frac{L/c}{4\pi r^2} \frac{\Delta r}{\lambda_{\mathrm{mfp}}} \tag{1.13}$$

ofwel, gebruik makend van Eq.(1.7) voor de vrije weglengte,

$$\Delta P_r = \frac{L}{c} \frac{\Sigma n}{4\pi r^2} \Delta r \tag{1.14}$$

en in de limiet voor infinitesimale stapjes vinden we de stralingsdrukgradiënt

$$\frac{dP_r}{dr} = \frac{L}{c}\frac{\Sigma n}{4\pi r^2} = \frac{L}{c}\frac{\Sigma\rho}{4\pi\mu r^2} \tag{1.15}$$

Omdat L zo sterk toeneemt met M, besluiten we dat in zeer massieve sterren de stralingsdruk de ster uiteen kan blazen. Daardoor is er een tamelijk *lage* bovengrens aan de massa van sterren: bij uitrekenen blijkt dat sterren met een massa van meer dan zo'n honderd zonsmassa's niet stabiel kunnen zijn.

Laten we eens schatten wat die bovengrens zou kunnen zijn. Als de stralingsdruk de structuur van de ster domineert, kunnen we Eq.(1.15) invullen in de vergelijking voor het hydrostatisch evenwicht en vinden

$$\frac{\Sigma}{4\pi\mu}\frac{L}{c} = GM(r) \tag{1.16}$$

Inplaats van deze lastige vergelijking op te lossen, schatten we brutaalweg dat $M(r) \approx M$ (de totale massa van de ster) en vinden: *de lichtkracht van een door stralingsdruk gedomineerde ster is evenredig met de massa van de ster,*

$$L = 4\pi\frac{c}{\Sigma}G\mu M = 6.30\ M \quad \mathrm{W} \tag{1.17}$$

Ga nu zelf het volgende na.

Reken met Eq.(1.17) uit wat de maximale lichtkracht is van de Zon. Wat is de conclusie uit het feit dat de waargenomen lichtkracht zoveel kleiner is dan de berekende waarde?

Vervolgens roepen we de massa-lichtkracht relatie te hulp. Als we even niet op de constanten letten, hebben we dan

$$L = \alpha M \quad \text{en} \quad L = \beta M^{10/3} \tag{1.18}$$

waaruit we besluiten dat de maximale massa van een ster gevonden kan worden uit

$$M_{\max} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3/7} \tag{1.19}$$

Vullen we de constanten in, dan komt er

$$M_{\max} = 3.36 \times 10^{32} \quad \mathrm{kg} \ = 169 \quad M_\odot \tag{1.20}$$

Dit is een primitieve versie van de `Eddington limiet`. De bijbehorende lichtkracht is

$$L_{\max} = 2.1 \times 10^{33} \quad \mathrm{W} \ = 5.5 \times 10^6 \quad L_\odot \tag{1.21}$$

Een ster met 5 à 6 miljoen maal de lichtkracht van de Zon zou uiteraard bijzonder opvallend zijn! De meest massieve sterren ooit gevonden, hebben een massa ergens tussen de 100 en 150 zonsmassa's. Dat klopt dus wel met de hier gegeven schatting.

Wanneer je met behulp van de vrije weglengte wilt uitrekenen hoever je komt bij herhaalde verstrooiing, dan moet je er rekening mee houden dat bijna altijd de richting van het onderschepte deeltje tussen twee opeenvolgende botsingen drastisch verandert. Het deeltje voert een `dronkemanswandeling` uit (in het Engels: `random walk`). Dat is nogal wat anders dan bewegen in een rechte lijn. Als de vrije weglengte λ_{mfp} is, en de af te leggen weg is R, dan zou je verwachten dat het aantal stappen N waarin R wordt overbrugd gelijk is aan

$$N = \frac{R}{\lambda_{\mathrm{mfp}}} \tag{1.22}$$

Maar zo is het niet, want in een meerdimensionale ruimte ligt het $i+1$-ste stapje $\vec{r}_{i+1}$ niet precies in het verlengde van $\vec{r}_i$. In het algemeen zijn twee opeenvolgende stappen niet gecorreleerd, en dus is de gemiddelde afstand (aangegeven met $< >$) die na N stappen is bereikt, nul:

$$< \vec{r} >= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i = 0 \tag{1.23}$$

Met andere woorden, als je niet weet waar je heen wilt, kom je nergens. Maar dat wil niet zeggen dat een deeltje dat een dronkemanswandeling uitvoert, precies op $\vec{r} = 0$ blijft staan, want de verwachtingswaarde van de absolute waarde van $\vec{r}$ is *niet* gelijk aan nul. Immers,

$$< r^2 >= (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \ldots)^2 = \sum_{i=1}^{N} r_i^2 + \sum_{i,j} \vec{r}_i \cdot \vec{r}_j \tag{1.24}$$

Omdat de stappen niet met elkaar gecorreleerd zijn, is de gemiddelde som over de producten $\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j$ nul, en daarom is

$$< r^2 >= \sum_{i=1}^{N} r_i^2 \tag{1.25}$$

De gemiddelde waarde van $|\vec{r}_i|$ is de vrije weglengte $\lambda_{\rm mfp}$, zodat

$$< r^2 >= N \, \lambda_{\rm mfp}^2 \tag{1.26}$$

Hieruit concluderen wij, dat de gemiddelde afstand R vanaf het vertrekpunt die het deeltje in N stappen heeft bereikt gegeven wordt door

$$R = \lambda_{\rm mfp} \sqrt{N} \tag{1.27}$$

Dat is nogal wat anders dan Eq.(1.22) ! Laten wij eens uitrekenen hoeveel tijd een foton nodig heeft om van het centrum van een ster tot aan het oppervlak te komen. Uit Eq.(1.7,9,27) zien we dat

$$t = N \, \frac{\lambda_{\rm mfp}}{c} = \frac{R^2}{\lambda_{\rm mfp}^2} \frac{\lambda_{\rm mfp}}{c} = \frac{R^2}{c\lambda_{\rm mfp}} = \frac{1}{c} R^2 n \Sigma \tag{1.28}$$

Vullen wij de gegevens in die gelden in het centrum van een ster als de Zon, waar $R = 7 \times 10^8$ m,

$$t = 4 \times 10^{14} \quad \mathrm{s} = 13 \quad \mathrm{Myr} \tag{1.29}$$

Houd er bij deze uitwerking rekening mee dat de electronendichtheid in de kern van de Zon zeer veel groter is dan in de buitenlagen! Het duurt dus vele miljoenen jaren voordat een foton zich naar buiten geworsteld heeft. Daaruit volgt dat de koelingstijd van de Zon van dezelfde orde van grootte is. In de negentiende eeuw leidde dat tot een controverse: geologen vonden een leftijd van miljarden jaren voor de Aarde, Darwin en Wallace hadden voor hun biologische evolutie ook ongeveer zoveel tijd nodig, maar als de Zon niet ouder kan zijn dan 10 of 20 miljoen jaar is ewr een probleem. Ook toen al werd gesuggereerd dat de Zon een inwendige stralingsbron heeft, en thans weten wij dat dat inderdaad het geval is: kernfusie. *Fotonen zitten gevangen* in een ster, en worden slechts sporadisch vrijgelaten. Dit heeft belangrijke gevolgen voor het gedrag van een ster. Ook zien wij bijvoorbeeld dat de tijdschaal in Eq.(1.29) veel korter is dan de dynamische tijdschaal $1/\sqrt{G\rho}$, waaruit wij concluderen dat bij dynamische veranderingen van een ster (zoals oscillaties) het thermische gedrag van de fotonen altijd meeberekend moet worden. Bij trillingen van de ster zitten de fotonen gevangen en bewegen met de materie van de ster mee.

Ga nu zelf het volgende na.

Beredeneer dat dit inhoudt dat een ster maar langzaam van toestand kan veranderen. Maak hiertoe een schatting van de karakteristieke dynamische tijdschaal van een ster.