Stralingsprocessen 2010

Werkcollege 7 uitwerkingen

$$x = x_0(\sin\omega_0 t)^n \tag{1}$$

We werken in het niet-relativistische geval ($\beta << 1$). Dan geldt

$$\frac{\partial W}{\partial \omega} = \frac{8\pi\omega^4}{3c^2}|\hat{d}(\omega)|^2 = \frac{8\pi q^2\omega^4}{3c^2}|\hat{x}(\omega)|^2, \tag{2}$$

zie Eq. 3.26b (RL). Hierbij is $\hat{x}(\omega)$ de Fourier getransformeerde van $x(t)$,

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int x_0 \sin^n \omega_0 t \, \mathrm{e}^{i\omega t} dt. \tag{3}$$

We schrijven de sinus als

$$\sin\omega_0 t = \frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 t} - \mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2i}, \tag{4}$$

en gebruiken het binomium van Newton:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{5}$$

Dan volgt

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \frac{x_0}{2\pi}\int \frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\left[\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\mathrm{e}^{i(2k-n)\omega_0 t}\right]\mathrm{e}^{i\omega t}dt && (6)\\
&= \frac{x_0}{2\pi}\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\int \mathrm{e}^{i((2k-n)\omega_0+\omega)t}dt && (7)\\
&= \frac{x_0}{2\pi}\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\delta((2k-n)\omega_0+\omega). && (8)
\end{aligned}$$

Voor het spectrum volgt daaruit

$$\frac{\partial W}{\partial \omega} = \frac{8\pi q^2\omega^4}{3c^2}\left(\frac{x_0}{2\pi}\right)^2\left|\frac{1}{(2i)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\delta((2k-n)\omega_0+\omega)\right|^2. \tag{9}$$

Voor een gegeven n heeft het spectrum dus pieken op $\omega = (n-2k)\omega_0$ waarbij $0 \leq k \leq n$.