Stralingsprocessen 2010

Werkstuk 4c

De klassieke golfvergelijking voor een oscillerend veld ψ in één dimensie is:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = s^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

[1] De algemene oplossing hiervoor is te schrijven als

$$\psi = \psi_0 \exp(f(\omega, k))$$

waarin ω de frequentie en k het golfgetal. Geef de expressie voor $f(\omega, k)$.

[2] Geef het verband tussen ω, s en k (de *dispersievergelijking*).

[3] Laat zien dat s de *fasesnelheid* is, d.w.z. de snelheid waarmee een punt met vaste fase van ψ (b.v. een golftop) voortbeweegt.

[4] Tenzij s onafhankelijk is van k, is s niet de snelheid waarmee een eindig signaal zich voortplant (de *groepssnelheid*). Een eindige oplossing van de golfvergelijking is namelijk een superpositie,

$$A(x, t) = \int a(k) \psi dk$$

waarin ψ de boven gevonden elementaire oplossing is (monochromatische golf). Vul eerst de zo gevonden oplossing in onder het integraalteken.

[5] De groepssnelheid s_g is de snelheid waarmee een maximum van A zich voortplant. Dat maximum wordt gegeven door de conditie

$$\frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

Bepaal de snelheid waarmee dit punt zich beweegt alsvolgt. Beschouw de fase α van de golf, gegeven door

$$\alpha \equiv kx - \omega t$$

Het maximum van A is het punt van *stationaire fase*, d.w.z. het punt waar een kleine variatie δ van α nul is:

$$\delta \alpha = 0$$

Laat zien dat hieruit volgt dat het punt van stationaire fase voldoet aan

$$x \, \delta k - t \, \frac{\partial \omega}{\partial k} \, \delta k = 0$$

waaruit dan volgt dat de groepssnelheid wordt gegeven door

$$s_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Dit gedrag (veschil tussen fase- en groepssnelheid) heet *dispersie*.