Stralingsprocessen 2010

NB. Uitwerkingen van vorige week (6 oktober) staan achterin het RL boek.

Werkcollege 4 uitwerkingen

[1] Merk op dat de fase onveranderd moet zijn als de positie toeneemt met $n \cdot \lambda$ of de tijd met $n \cdot$ periode. De algemene oplossing is dan:

$$\psi = \psi_0 e^{i(kx-\omega t)}. \tag{1}$$

[2] Als we de dubbele afgeleiden naar de positie en tijd nemen

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2 A e^{i(kx-\omega t)}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \omega^2 A e^{i(kx-\omega t)}. \tag{2}$$

De golfvergelijking is dus opgelost als $\omega^2 = -s^2 k^2$, oftewel $\omega = \pm sk$ (de dispersievergelijking). Merk op dat s in het algemeen afhankelijk is van k.

[3] Een alternatieve beschrijving van een golf is

$$\psi = f(x - vt), \tag{3}$$

waarbij v de fase-snelheid is. Combineren we dit met $\psi = g(kx - \omega t)$ dan vinden we dat $v = \frac{\omega}{k}$ ($= s$ volgens de dispersievergelijking).

[4] Een specifieke golf is een Fourier som over de algemene oplossing:

$$A(x,t) = \int a(k)\psi dk, \tag{4}$$

waarbij $a(k)$ het *spectrum* en ψ de algemene oplossing van Eq. 1.

[5] We gaan op zoek naar de snelheid s_g waarmee een top van A zich voortplant. De fase van A is afhankelijk van k en wordt gegeven door

$$\alpha(k) = kx - \omega(k)t. \tag{5}$$

De maximale bijdrage aan A wordt gegeven wanneer $a(k)$ groot is *en de fase stationair is.* Dit wil zeggen dat de golven in fase optellen rond de k (noem deze k'), waarvoor geldt dat $\delta\alpha$=0. We beschouwen een golf op een vast punt in ruimte en tijd, hieruit volgt dus dat rond $k = k'$

$$x\delta k - t\delta\omega = 0 = x\delta k - t\frac{\partial \omega}{\partial k}\delta k, \tag{6}$$

en dus

$$s_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}\Big|_{k=k'}. \tag{7}$$

Merk op dat de groepssnelheid gelijk is aan de fase-snelheid als s onafhankelijk is van k.